DS SCIENCES PHYSIQUES MATHSPÉ

calculatrice: non autorisée

durée: 4 heures

Sujet

Satellites artificiels

Rappel :

On peut éventuellement (mais pas nécessairement), selon la façon d'aborder les calculs, être amené à utiliser, ou non, quelques résultats concernant les produits de vecteurs:

- *anticommutativité du produit vectoriel:* $\vec{a}\wedge\vec{d}=-\vec{d}\wedge\vec{a}$
- *double produit vectoriel :* $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{b}(\vec{c}.\vec{a})-\vec{c}(\vec{a}.\vec{b})$
- *produit mixte :* $\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{b}.(\vec{c}\wedge\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}\wedge\vec{b})$

On étudie des satellites artificiels terrestres. Dans le cadre de cette étude on considère un modèle simple se basant sur les hypothèses suivantes :

– le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique $\mathscr{R}_G$ supposé galiléen ;

– la Terre de masse M_T est supposée sphérique de centre O et de rayon R_T ;

– le satellite artificiel sera assimilé à un point matériel P de masse m ;

– le satellite est supposé soumis à la seule action de la Terre. La constante de gravitation est notée G .

On pose $\vec{r}=\overrightarrow{OP}=r\vec{u}_r$ avec $\vec{u}_r$ vecteur unitaire de $\overrightarrow{OP}$.

I. Questions préliminaires

1. Donner l'expression vectorielle de la force $\vec{F}$ subie par le satellite P en fonction de G , m , M_T , $\vec{r}$, r .
2. On écrit désormais $\vec{F}=-\frac{K}{r^2}\vec{u}_r$; donner l'expression de K . Dans la suite, on travaillera avec cette notation K .
3. Cette force est « conservative ».
   - Que signifie cette expression ?
   - On définit l'énergie potentielle E_p (à une constante près) par $\vec{F}=-\overrightarrow{grad}\,E_p$. On rappelle l'expression du gradient en coordonnée sphériques (r,θ,φ) : $\overrightarrow{grad}\,f(r,\theta,\varphi)=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{u}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi$. En procédant avec rigueur, retrouver l'expression de l'énergie potentielle E_p . La constante arbitraire est prise nulle. Quelle est la signification physique de ce choix ?
4. Cette force est « centrale ».
   - Que signifie cette expression ?

- Rappeler l'énoncé (texte et non formule) du théorème du moment cinétique.

5. On se propose ici de démontrer le théorème du moment cinétique pour un point matériel P de masse m . Ce point matériel est soumis à une force notée $\vec{F}$.
   - Définir le moment cinétique $\vec{\sigma}$, en un point quelconque A , dans $\mathscr{R}$ référentiel galiléen, d'un point P de masse m , de vitesse $\vec{v}$, soumis à une force $\vec{f}$.
   - Déterminer $\dfrac{d\vec{\sigma}}{dt}$ dans $\mathscr{R}_G$ en fonction de $\vec{v}_A$ (vitesse du point A) , $\vec{v}$ (vitesse du point P) , $\vec{p}=m\vec{v}$, $\vec{\mathscr{M}}(A)=\overrightarrow{AP}\wedge\vec{f}$.
   - Que peut-on en déduire si A est fixe ?
6. On revient au problème du satellite. Justifier avec précision que le moment cinétique en O est une constante.
7. La mise sur orbite du satellite artificiel se fait a partir d'une fusée en un point P_0 ($\overrightarrow{OP_0}=\vec{r}_0$) situé à une distance r_0 du centre O de la Terre, $r_0>R_T$. La vitesse de lancement du satellite par rapport à $\mathscr{R}_G$ est $\vec{v}_0$. Déduire avec rigueur de l'étude précédente que, après sa mise sur orbite, le satellite parcourt une trajectoire plane. Caractériser complètement le plan de la trajectoire (en fonction des données notamment $\vec{r}_0$ et $\vec{v}_0$).

II. Intégrales premières

Dans toute la suite, on repère la position du satellite dans le plan de sa trajectoire en coordonnées polaires-cylindriques (r,θ,z) avec $\vec{r}=\overrightarrow{OP}=r\vec{u}_r$ et $\theta=(\overrightarrow{OP_0},\overrightarrow{OP})$ orienté de $\overrightarrow{OP_0}$ vers $\overrightarrow{OP}$. La trajectoire s'effectue dans le plan $z=0$.

On travaille désormais dans la base orthonormée directe cylindrique $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$. On rappelle que $\vec{u}_\theta=\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta}$ et que $\vec{u}_z=\vec{u}_r\wedge\vec{u}_\theta$.

On note α_0 l'angle de $\vec{r}_0$ vers $\vec{v}_0$ soit $\alpha_0=(\vec{r}_0,\vec{v}_0)$.

8. Faire un schéma représentatif dans le plan de la trajectoire du satellite montrant O , P_0 , P , $\vec{r}_0$, $\vec{r}$, $\vec{v}_0$, θ et α_0 .
9. Démontrer, avec précision, l'expression de la vitesse $\vec{v}$ du satellite en fonction de r , $\mathring{r}=\dfrac{dr}{dt}$, $\mathring{\theta}=\dfrac{d\theta}{dt}$ dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$.
10. Le moment cinétique en O du satellite s'écrit $\vec{\sigma}=\sigma\vec{u}$ où $\vec{u}$ désigne l'un des vecteurs unitaires de la base adoptée $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$. De quel vecteur unitaire s'agit-il ? Déterminer l'expression de σ en fonction de m , r , θ (on peut faire intervenir les dérivées de r et θ). Donner la valeur de σ en tenant compte des conditions initiales. En déduire une équation de conservation ou intégrale première du mouvement.
11. L'énergie mécanique totale du satellite est notée E . Déterminer l'expression de E en fonction de K , m , r , θ (on peut faire intervenir les dérivées). Justifier qu'on peut

écrire une deuxième équation de conservation ou intégrale première du mouvement. On tiendra compte des conditions initiales.

III. Vecteur de Hamilton (intégrale première de Landau)

On peut trouver pour le problème étudié d'autres grandeurs conservatives: le vecteur de Hamilton, le vecteur de Laplace-Runge-Lenz (ou proche de ce dernier: le vecteur excentricité). Le problème aborde donc ici une autre démarche que celle consistant à utiliser la conservation de σ et celle de E .

On définit le vecteur de Hamilton $\vec{H}$ du satellite artificiel par:

$$\vec{H}=\vec{p}\ -\ m\frac{K}{\sigma^2}(\vec{\sigma}\wedge\frac{\vec{r}}{r})\ \text{ avec }\ \vec{p}=m\vec{v}\ \text{ et }\ K\ \text{ défini par }\ \vec{F}=-\frac{K}{r^2}\vec{u}_r\ .$$

($\vec{\sigma}$ est supposé non nul).

12.Déterminer, en justifiant avec précision, $\frac{d\vec{H}}{dt}$. En déduire que le vecteur $\vec{H}$ reste constant au cours du mouvement (intégrale première de Landau) dans le cas étudié.

On appelle hodographe du mouvement le lieu des points A tels que $\overrightarrow{O'A}=\vec{v}$, O' étant un point fixe quelconque de l'espace. Pour tracer l'hodographe, on porte donc le vecteur $\vec{v}$ à partir d'un point O' . L'hodographe du mouvement est le lieu des points décrits par l'extrémité A du vecteur vitesse au cours du temps.

13.Que peut-on dire de la direction de $\vec{H}$ par rapport à celle de $\vec{\sigma}$?

14.Montrer que $\vec{v}$ est la somme d'un vecteur constant et d'un vecteur de norme constante. En déduire la forme de l'hodographe.

Pour certaines conditions initiales, l'hodographe entoure le point O' . Le point O' se trouve à l'intérieur de l'hodographe. Dans d'autres cas, O' se trouve à l'extérieur de l'hodographe. Enfin, on peut envisager le cas où O' se trouve sur l'hodographe.

15.Dans chaque cas: que peut-on dire à propos des directions permises pour le vecteur vitesse. On sait, on admet, que la trajectoire décrite par le mobile P est une conique. En vertu de cette étude de l'hodographe, que peut-on dire de plus concernant la nature de la conique décrite par P . Préciser au maximum (on sera éventuellement amené à distinguer deux cas lorsque le point O' se trouve à l'extérieur).

16.Préciser la direction de $\vec{H}$ en partant du cas particulier où le mobile se trouve au sommet de la trajectoire.

17. Justifier (méthode au choix) qu'une trajectoire circulaire est ici uniforme. Que vaut alors $\vec{H}$ dans le cas d'une trajectoire circulaire ?

IV. Excentricité

On définit le vecteur $\vec{\epsilon}=\frac{1}{mK}\vec{H}\wedge\vec{\sigma}$.

18.Dans quel plan se situe ce vecteur $\vec{\epsilon}$? Préciser sa direction.

19.Montrer que le vecteur $\vec{\epsilon}$ est une constante du mouvement.

20.En exprimant le produit scalaire $\vec{r}.\vec{\epsilon}$ de deux façons différentes (l'une des expressions faisant intervenir le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs), retrouver l'équation polaire de la trajectoire sous la forme $r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$ où p (paramètre), e (excentricité), θ_0 sont des constantes. On impose $p\geqslant 0$ et $e\geqslant 0$. Exprimer p et e en fonction de σ , K et de $\vec{\epsilon}$.

21.Quelle est la valeur particulière prise par r lorsque $\theta=\theta_0$. En déduire la signification de θ_0 .

22.Exprimer le paramètre p et l'excentricité e en fonction des grandeurs initiales : r_0 , v_0 , α_0 et des constantes de l'énoncé G et M_T . En écrivant les conditions initiales ($t=0$, $\theta=0$) déterminer l'angle θ_0 (on exprimera deux lignes trigonométriques : $\sin\theta_0$ et $\cos\theta_0$ en fonction de r_0 , α_0 , p , e)

V. Exemple

On considère le cas particulier : $\frac{r_0 v_0^2}{G M_T}=1$. L'angle α_0 est un angle aigu positif.

23.En utilisant certains des résultats obtenus précédemment, étudier le cas limite $\alpha_0=\frac{\pi}{2}$. De quelle trajectoire s'agit-il. Illustrer par une figure.

24.Étudier de même l'autre cas limite $\alpha_0=0$. Préciser le(s) point(s) particulier(s). Illustrer par une figure.

25.Étudier le cas général $0<\alpha_0<\frac{\pi}{2}$.

- Déterminer l'excentricité et dire de quelle conique il s'agit ici?
- Déterminer p et θ_0 .
- Faire un schéma clair et soigné représentant la trajectoire et indiquant O , P_0 , $\vec{r_0}$, $\vec{v_0}$, $\vec{\epsilon}$, θ_0 et α_0 . Indiquer l'axe des coordonnées polaires et l'axe de la conique.
- Que peut-on ajouter concernant la position particulière du lancement ?

Gaz parfait et travail

Rappels :

1) On rappelle les expressions des fonctions d'état pour un gaz parfait en fonction de la température T et de la pression P , dans le cas où le coefficient γ peut être assimilé à une constante. R désigne la constante des gaz parfaits et n désigne le nombre de moles.

Énergie interne (à une constante près notée ici U_0) :

$$U(T,P) = nR\frac{1}{\gamma-1}T+U_0$$

Enthalpie (à la constante près U_0) :

$$H(T,P) = nR\frac{\gamma}{\gamma-1}T+U_0$$

Entropie (à une constante près notée ici S_0) :

$$S(T,P) = nR\frac{\gamma}{\gamma-1}\ln(T)-nR\ln(P)+S_0$$

2) On rappelle les expressions des bilans (dans le cas du problème qui suit) en utilisant les notations habituelles.

Premier principe :

$$\Delta U=W+Q$$

Deuxième principe :

$$\Delta S=S_{échange}+S_{créé}$$

(avec : $S_{échange}=\int_{frontière\,du\,système}\frac{\delta Q}{T_{frontière}}$ *)*

Dans le problème, on considère n moles de gaz parfait (le coefficient γ est constant).

I. Généralités

1. Montrer que pour une transformation adiabatique (réversible ou irréversible) , le travail est égal à la variation d'une fonction d'état. Laquelle ?
2. Montrer que pour une transformation à pression constante (c'est à dire monobare : la pression extérieure est constante et les états initial et final sont des états d'équilibre avec l'extérieur, la pression du système dans les états intermédiaires n'est pas a priori définie, la transformation peut être réversible ou irréversible) , la chaleur est égale à la variation d'une fonction d'état (définir

les notations utilisées pour la démonstration) . Laquelle ?

3. En partant des rappels précédents, démontrer la relation entre P et T sous la forme $T\,P^{\alpha}=constante$ pour une transformation isentropique. Exprimer α en fonction de γ .

II. Expressions de variations des fonctions d'état

On considère, dans un cylindre fermé par un piston mobile coulissant sans frottement, n moles de gaz parfait (le coefficient γ est constant).

4. Le gaz subit une transformation monotherme de l'état A (P_1, T_1) à l'état B $(P_2 > P_1, T_2)$ (monotherme : une seule source de chaleur extérieure de température stationnaire T_0 , l'état initial et l'état final sont des états d'équilibre donc $T_1 = T_0$ et $T_2 = T_0$, la température du système dans les états intermédiaires n'est pas a priori définie) .
   - Quel qualificatif peut-on proposer pour cette transformation parmi les suivants: compression, détente, chauffage, refroidissement ?
   - En partant des rappels précédents, déterminer $\Delta U_{1\rightarrow 2}$, $\Delta H_{1\rightarrow 2}$ et $\Delta S_{1\rightarrow 2}$ en fonction des données $P_1, P_2, T_0, n, R, \gamma$.

5. On considère le même système. Le gaz subit cette fois une transformation monobare de l'état A (P_1, T_1) à l'état B $(P_2, T_2 > T_1)$ (monobare : une seule source de pression extérieure de pression stationnaire P_0 , l'état initial et l'état final sont des états d'équilibre donc $P_1 = P_0$ et $P_2 = P_0$, la pression du système dans les états intermédiaires n'est pas a priori définie) .
   - Quel qualificatif peut-on proposer pour la transformation parmi les suivants: compression, détente, chauffage, refroidissement ?
   - Déterminer $\Delta U_{1\rightarrow 2}$, $\Delta H_{1\rightarrow 2}$ et $\Delta S_{1\rightarrow 2}$ en fonction des données $T_1, T_2, P_0, n, R, \gamma$.

III. Cas particuliers de transformations monothermes entre A et B

A. Transformation 1

On suppose ici que la transformation monotherme de l'état A $(P_1, T_1 = T_0)$ à l'état B $(P_2 > P_1, T_2 = T_0)$ est en fait isotherme (et réversible).

6. Déterminer l'entropie créée au cours de cette transformation. Donner l'expression de l'entropie échangée au cours de la transformation.

7. Déterminer $Q_{1\rightarrow 2}$ et $W_{A\rightarrow B} = W_{1\rightarrow 2}$. Commenter les signes de ces grandeurs.

8. On rappelle que les temps caractéristiques (temps de relaxation) pour les échanges de chaleur vers le retour à l'équilibre thermique (uniformisation des températures) sont bien plus grands que les temps caractéristiques pour les échanges mécaniques vers le retour à l'équilibre mécanique (uniformisation des pressions). Quelle est le plus difficile à approcher: réversibilité thermique ou mécanique ? Que peut-on prévoir quant à la durée d'une telle transformation isotherme ?

B. Transformation 2

On suppose ici que la transformation monotherme est formée de deux étapes : une première étape « rapide » que l'on suppose adiabatique et réversible de l'état A $(P_1, T_1 = T_0)$ à l'état intermédiaire i $(P_i = P_2 > P_1, T_i)$ et une seconde étape ou l'on attend que, en contact avec la source T_0 , le fluide passe à l'état B $(P_2, T_2 = T_0)$, la pression extérieure agissant sur le gaz reste égale à P_2 au cours de cette étape.

Les données sont donc : P_1 , P_2 , T_0 , n , R , γ .

9. Quel qualificatif peut-on proposer pour la première étape de la transformation parmi les suivants: compression, détente, chauffage, refroidissement ?
10. Cette première étape est supposée adiabatique. Commenter l'hypothèse d'adiabaticité par rapport à la notion de temps de relaxation rappelée plus haut. Justifier alors l'hypothèse de réversibilité thermique puis celle de réversibilité mécanique pour cette étape.
11. Quel qualificatif peut-on proposer pour la deuxième étape de la transformation parmi les suivants: compression, détente, chauffage, refroidissement ?
12. Justifier le caractère réversible ou irréversible de cette deuxième étape.
13. Peut-on aussi utiliser le qualificatif monotherme ou le qualificatif monobare pour cette deuxième étape ? Justifier.
14. Déterminer T_i en fonction de certaines données.
15. Déterminer $Q_{1\rightarrow i}$ et $W_{1\rightarrow i}$ pour la première étape en fonction des données .
16. Déterminer $Q_{i\rightarrow 2}$ et $W_{i\rightarrow 2}$ pour la deuxième étape en fonction des données .
17. En déduire $W_{A\rightarrow B}$ noté aussi $W_{1\rightarrow 2}$.
18. Déterminer l'entropie créée.

C. Transformation 3

On suppose ici que la transformation monotherme est formée de deux parties analogues à la transformation 2 précédente:

première partie: première étape adiabatique et réversible de l'état A $(P_1, T_1 = T_0)$ à l'état j (P_K, T_j) (P_K est intermédiaire entre P_1 et $P_2 > P_1$) puis en contact avec la source T_0 et à pression extérieure constante P_K , le fluide passe à l'état K $(P_K, T_K = T_0)$.

seconde partie: première étape adiabatique et réversible de l'état K $(P_K, T_K = T_0)$ à l'état l (P_2, T_l) puis en contact avec la source T_0 et à pression extérieure constante P_2 , le fluide passe à l'état B $(P_2, T_2 = T_0)$.

19. Positionner qualitativement les points A , B , i , j , K , l dans un diagramme de Clapeyron (P,V) et tracer la transformation 1, la transformation 2, la transformation 3 en couleurs différentes.
20. Comment retrouver le travail $W_{1\rightarrow 2}$ sur ce diagramme de Clapeyron. Le travail dans la transformation 3 sera-t-il plus grand ou plus petit que dans la transformation 2 ?

21.Pour la transformation 3, déterminer $W_{A \to K}$ puis $W_{K \to B}$ en fonction des données et du paramètre P_K .

22.Pour quelle valeur de P_K , le travail $W_{A \to B}$ est-il extrémal. S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum ?

23.On suppose que P_K possède la valeur déterminée ci-dessus. Déterminer $W_{A \to B}$ et l'entropie créée.

D. Transformation idéale

24.La transformation monotherme envisagée ici est formée d'un nombre plus grand de « parties » au sens envisagé précédemment. Justifier qu'en augmentant le nombre de ces « parties » le travail tend vers une valeur limite $W_{A \to B}^{\lim}$. On pourra justifier à l'aide d'un diagramme de Clapeyron.

25.Donner l'expression de $W_{A \to B}^{\lim}$.

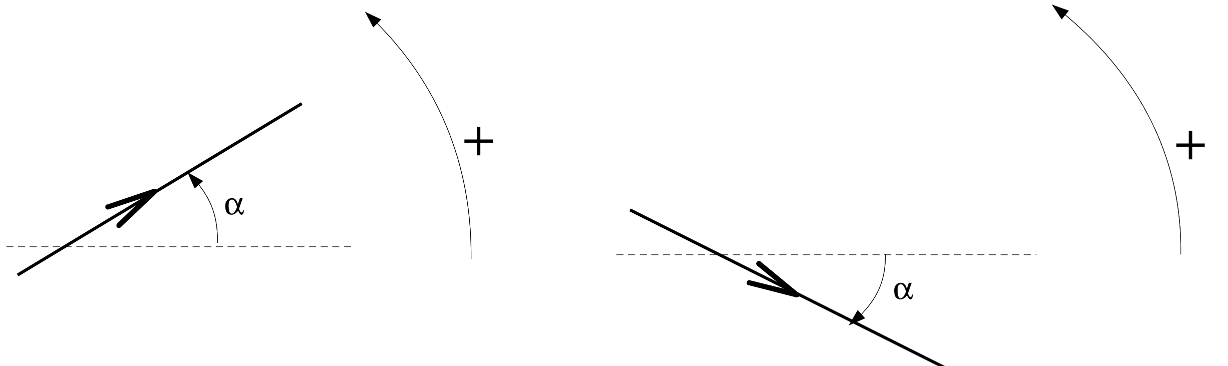
26.Faire un tableau récapitulatif indiquant pour la transformation 1, la transformation 2, la transformation 3, la valeur de $W_{A \to B}$, de la différence entre $W_{A \to B}$ et $W_{A \to B}^{\lim}$, de l'entropie créée $S_{créé}$. Quelle relation peut-on constater pour chaque transformation entre $W_{A \to B}$, $W_{A \to B}^{\lim}$, $S_{créé}$. Commenter.

27.Démontrer la relation précédente dans le cas général d'une compression monotherme.

Lentilles et lunettes

Remarques :

- *Les constructions seront réalisées au stylo et non au crayon papier. On respectera scrupuleusement les pointillés (constructions, trajets virtuels, objet ou image virtuels)*
- *Les angles sont ici des grandeurs algébriques*



$\alpha > 0$ $\alpha < 0$

I. Généralités

A. Conditions de Gauss

1. Dans la suite les lentilles sont utilisées dans les conditions de Gauss. Indiquer en quoi consiste cette approximation et quelles en sont les principales conséquences.

B. Formules

On donne ci dessous (*Figure a*) la construction dans le cas d'un objet réel, d'une image réelle pour une lentille mince convergente. On pose $\sigma=\overline{FA}$, $\sigma'=\overline{F'A'}$, $f=\overline{OF}$, $f'=\overline{OF'}$.

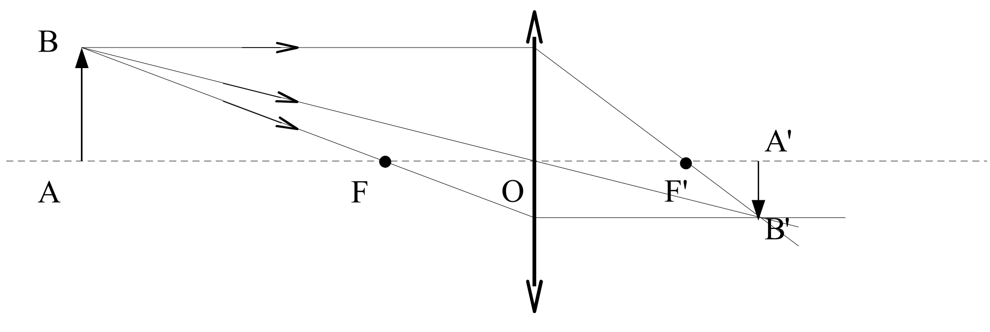


Figure a

2. Rappeler la définition du grandissement γ .
3. En partant de la figure, démontrer avec précision, en tenant compte des signes, une expression du grandissement γ en fonction de σ et f puis une autre expression de γ en fonction de σ' et f' (relations de grandissement de Newton) .
4. En déduire la relation de conjugaison de Newton reliant σ , σ' et par exemple f' .
5. En partant des relations de Newton, on démontre facilement les relations de Descartes faisant intervenir $p=\overline{OA}$, $p'=\overline{OA'}$, $f'=\overline{O'F'}$. On ne demande pas ici les démonstrations.

Rappeler la relation de conjugaison de Descartes pour une lentille mince. Rappeler la relation de grandissement de Descartes pour une lentille mince.

C. Constructions

6. Sur la *Figure* 1 , tracer en utilisant les trois rayons particuliers habituels, l'image $A'B'$ pour l'objet AB dans le cas d'une lentille convergente. Les deux points sur l'axe optique désignent les foyers de la lentille (rendre l' *Annexe* jointe en fin de problème) .

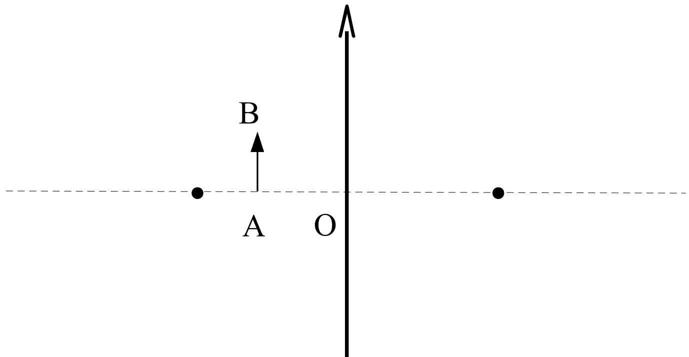


Figure 1

7. Sur la *Figure* 2 , tracer en utilisant les trois rayons particuliers habituels, l'image $A'B'$ pour l'objet AB dans le cas d'une lentille divergente. Les deux points sur l'axe optique désignent les foyers de la lentille.

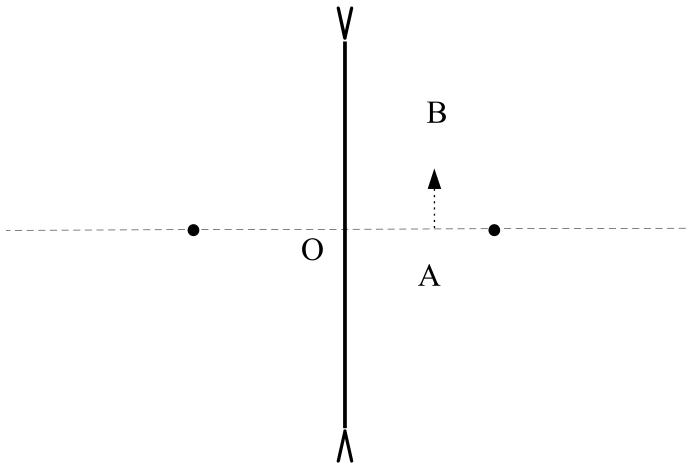


Figure 2

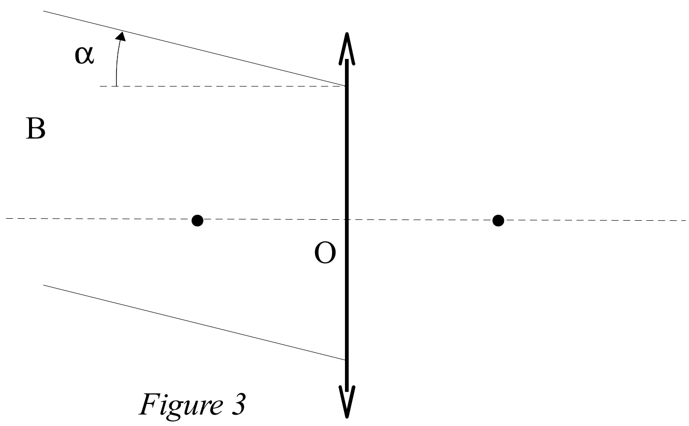


Figure 3

8. Sur la $Figure\,3$, la lentille est convergente et l'objet est à l'infini, vu sous un diamètre apparent α . Le point A est sur l'axe. On a tracé le faisceau issu de B Par construction la plus simple possible, déterminer B' , A' et le faisceau de sortie correspondant au faisceau d'entrée. Exprimer $\overline{A'B'}$ en fonction de α et des caractéristiques habituelles de la lentille.

D. Divers

9. En général, une lentille convergente donne d'un objet AB une image réelle. Préciser (nature de l'objet et position de l'objet) , dans quel cas l'image donnée par une lentille convergente est virtuelle.

10. En général, une lentille divergente donne d'un objet AB une image virtuelle. Préciser (nature de l'objet et position de l'objet) , dans quel cas l'image donnée par une lentille divergente est réelle.

11. Application numérique: la focale d'une lentille mince divergente est de $25\,cm$ et le grandissement vaut 2 (image droite) . Déterminer la position de l'objet et celle de l'image.

II. Instruments à lentilles

A. Viseur à frontale fixe

Un viseur (voir $Figure\,b$) est constitué d'un objectif convergent L_1 (focale f'_1 , centre optique O_1) et d'un oculaire convergent L_2 (focale f'_2 , centre optique O_2) de même axe optique Ox . En O , perpendiculairement à l'axe optique, se trouve le réticule (deux fils en croix).

On pose $\overline{OO_2}=\ell>0$. La distance ℓ est réglable. Le premier réglage consiste en effet à régler la distance ℓ afin de voir nettement le réticule à travers l'oculaire.

L'objectif donne de l'objet étudié AB une image A_1B_1 . Le deuxième réglage consiste à déplacer globalement le viseur pour voir nettement A_1B_1 à travers l'oculaire. L'oculaire donne de A_1B_1 une image $A'B'$.

L'observateur place son œil dans le plan focal image de l'oculaire. Il a une vision normale (PR (distance maximale de vision distincte) égal à $D_M=\infty$, PP (distance minimale de vision distincte) égal à $d_m=25\,cm$.

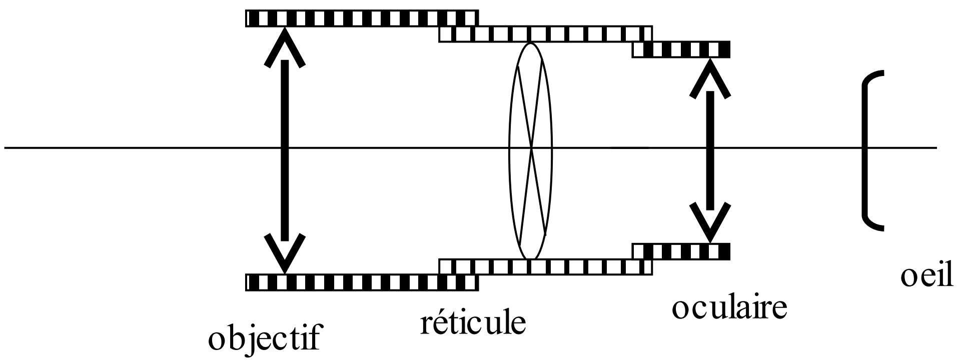


Figure b : schéma de principe pour viseur ou lunette astronomique

Données:

$f'_1 = 5\,cm$

$f'_2 = 1\,cm$

12.Quel est l'intervalle de valeurs de ℓ permettant à l'observateur de voir net le réticule. De combien le tirage de l'oculaire peut-il varier entre les deux cas extrêmes ? Expression littérale puis application numérique.

On choisit le réglage permettant une observation sans fatigue.

La distance $\overline{O_1 O_2} = L$ est fixée. On observe un objet A sur l'axe.

Donnée:

$L = 11\,cm$

13.Où doit-on placer le viseur pour voir l'objet et le réticule nets tous deux (on donnera $\overline{O_1 A}$ - frontale -). Expression littérale puis application numérique.

14.Compléter la figure qualitative $Figure\,4$ donnant dans le cas étudié à la question précédente, l'image intermédiaire $A_1 B_1$, la position des différents foyers obtenus par construction, la position de l'œil et la marche d'un faisceau de lumière issu du point B de l'objet jusqu'à l'œil.

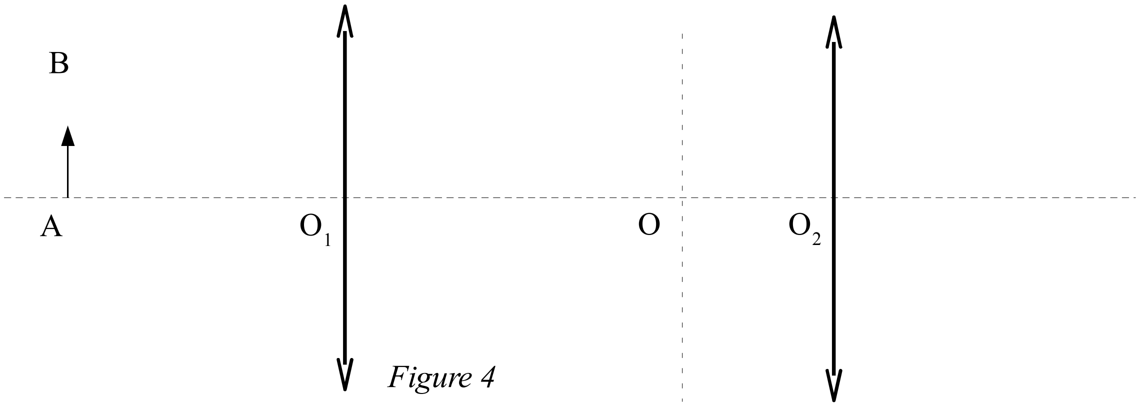


Figure 4

15.Le réglage reste le même mais l'observateur pointe l'objet (en déplaçant le viseur) sans tenir compte de la netteté nécessaire du réticule. Déterminer les positions extrêmes du viseur rendant l'objet net. Quelle est alors l'erreur maximale commise dans l'estimation de la position de l'objet pointé. Calcul littéral puis application numérique.

B. Lunette astronomique

La lunette est constituée d'un objectif convergent L_1 (focale f'_1 , centre optique O_1) et d'un oculaire convergent L_2 (focale f'_2 , centre optique O_2) de même axe optique Ox . On cherche à visualiser l'image d'un objet AB très éloigné comme par exemple une étoile. On supposera que l'objet est rejeté à l'infini. On veut que l'image finale de l'étoile par la lunette (donc après traversée des deux lentilles) soit elle aussi à l'infini (réglage dit *afocal*).

16.Exprimer la distance $d = \overline{O_1 O_2}$ en fonction de f'_1 et f'_2 . Ou faut-il placer le réticule ?

17.Compléter le schéma $Figure\,5$ de la lunette (le réglage de la lunette est afocal) quand on observe B à l'infini situé hors de l’axe optique de la lunette (A est sur l'axe) : construction de l'image de B et tracé du faisceau de lumière issu de B couvrant tout l'objectif.

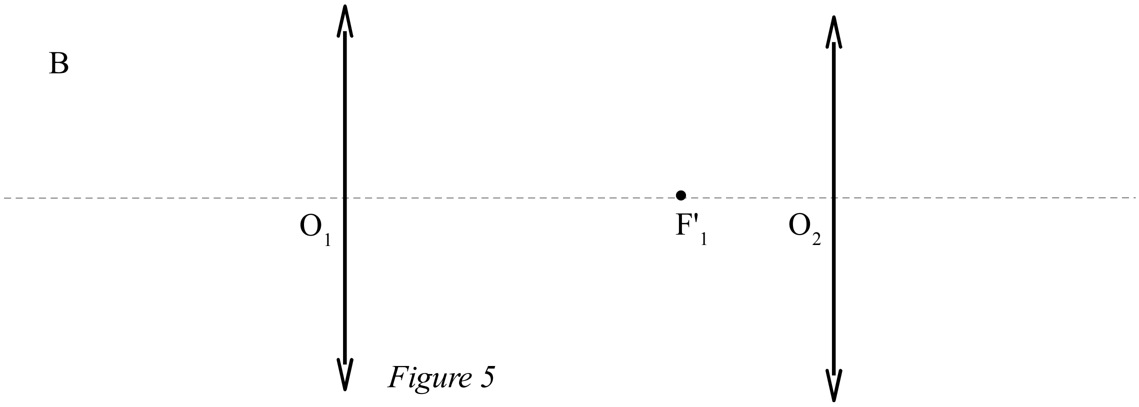


Figure 5

18.Le faisceau incident est incliné de α et le faisceau émergent de α' . Donner l'expression du grossissement algébrique (ou grandissement angulaire) $G=\frac{\alpha'}{\alpha}$.

Le réglage de la lunette comporte deux étapes : le premier réglage (cf viseur à frontale fixe) consiste à voir le réticule net et sans accommodation à travers l'oculaire. Le deuxième réglage, étudié ici, consiste à régler la distance objectif-réticule pour une visée à l'infini. Ce réglage se fait par autocollimation. Le réticule est éclairé par une ampoule située à l'intérieur de la lunette autocollimatrice.

19.On considère un point P du réticule, jouant le rôle de source de lumière. Le miroir utilisé est sur la *Figure* 6 supposé perpendiculaire à l'axe optique. Sur cette figure, le réglage de la lunette est supposé terminé. Tracer la marche des deux rayons issus du point P jusqu'à l'œil.

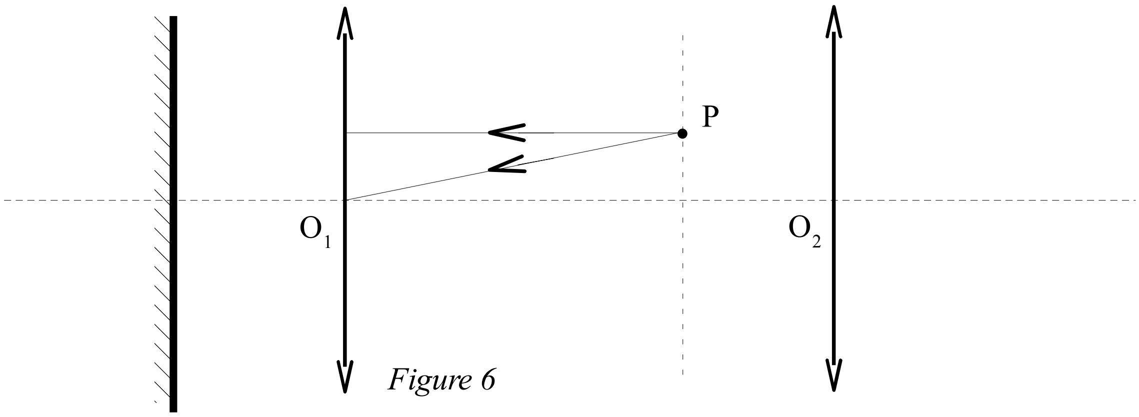


Figure 6

20.Que voit-on en regardant dans l'oculaire (on pourra supposer ici que le miroir n'est pas nécessairement rigoureusement perpendiculaire à l'axe optique). Expliquer alors comment régler le tirage oculaire-réticule pour une lunette de visée à l'infini.

C. Lunette de Galilée

La lunette est constituée d’un objectif convergent L_1 (focale f'_1 , centre optique O_1) et d'un oculaire divergent L_2 (focale f'_2 , centre optique O_2) de même axe optique Ox . L’objet est à l’infini.

21.Dans quelles conditions l'ensemble est-il afocal ? Exprimer la distance $d=\overline{O_1O_2}$ en fonction de f'_1 et f'_2 . Qu'en est-il de la position d'un réticule ?

22.Compléter le schéma *Figure* 7 de la lunette et de la marche du faisceau de lumière entrant dans l'appareil (réglage afocal) quand on observe B à l'infini situé hors de l'axe optique de la lunette.

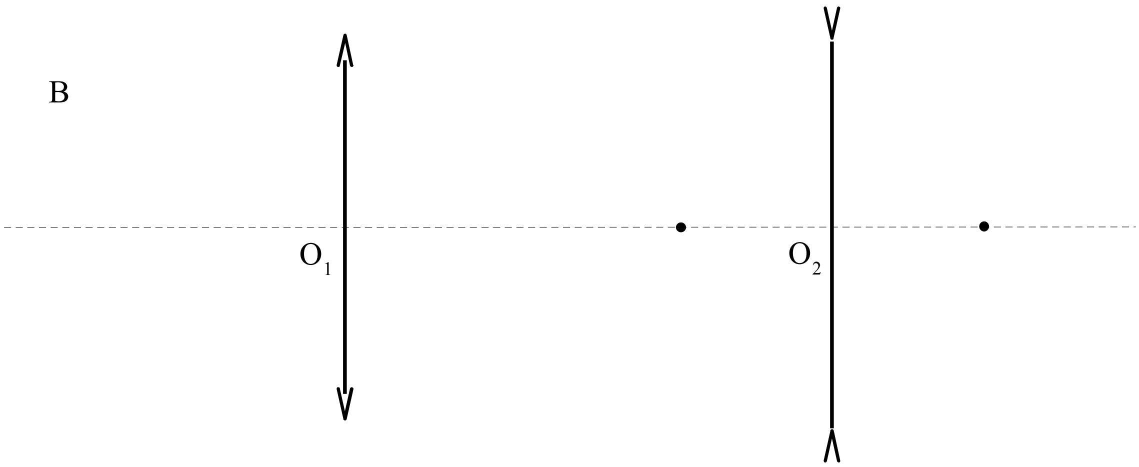


Figure 7 :
on a indiqué par des points la position des foyers de l'oculaire

23.Le faisceau incident est incliné de α et le faisceau émergent de α' . Donner l'expression du grossissement algébrique $G=\frac{\alpha'}{\alpha}$. Commenter le signe de G .

ANNEXE1 NOM : ________________________________

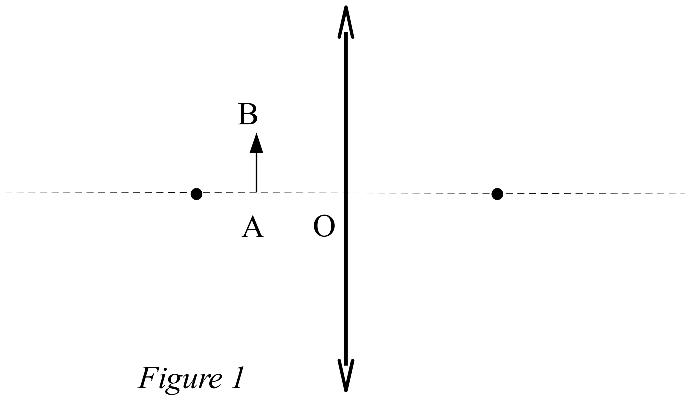


Figure 1

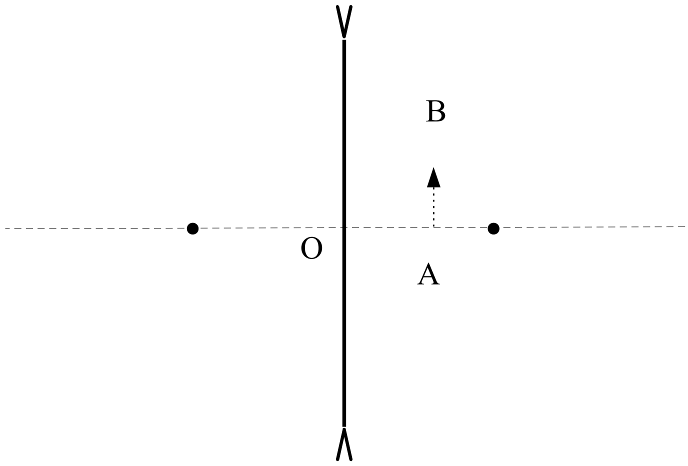


Figure 2

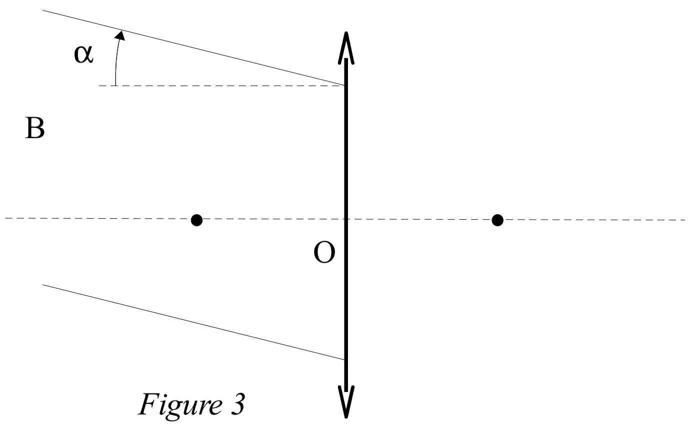


Figure 3

ANNEXE2 NOM : ________________________________

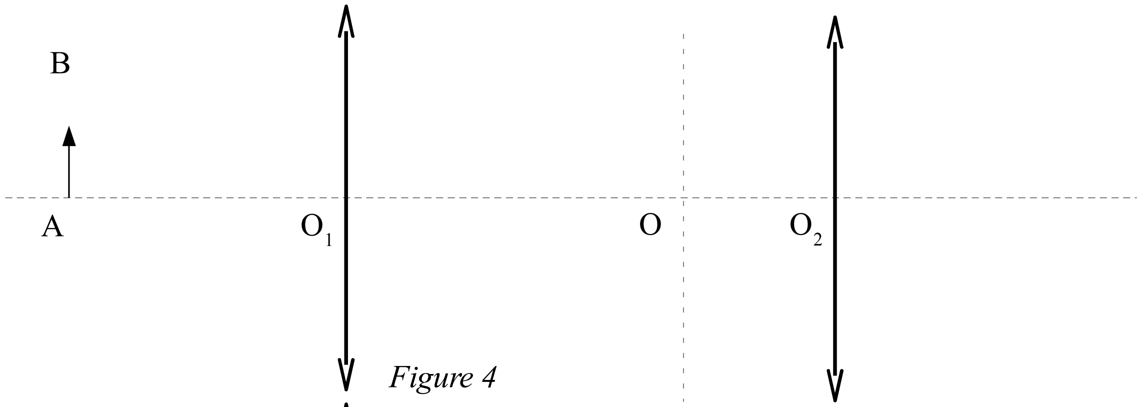


Figure 4

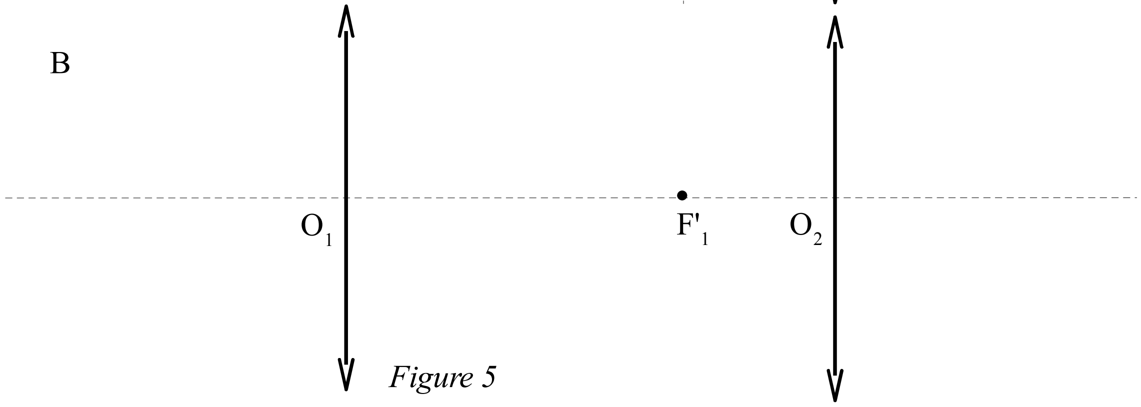


Figure 5

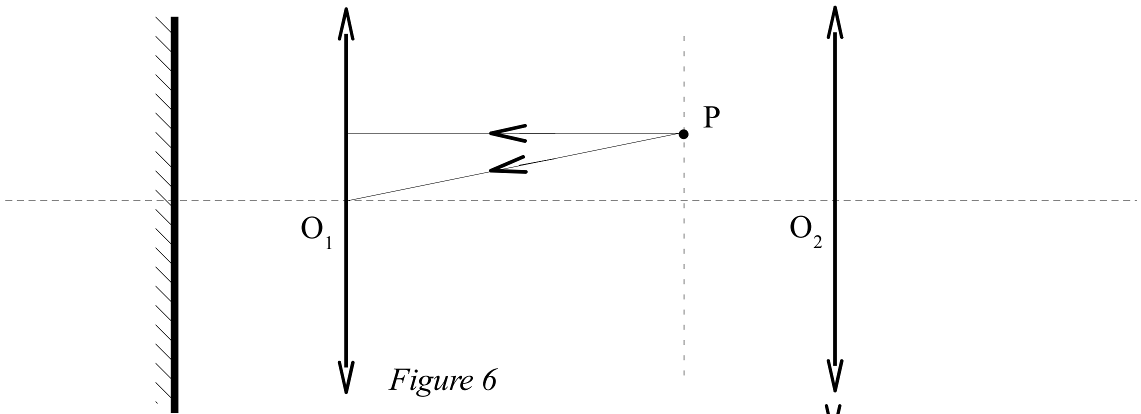


Figure 6

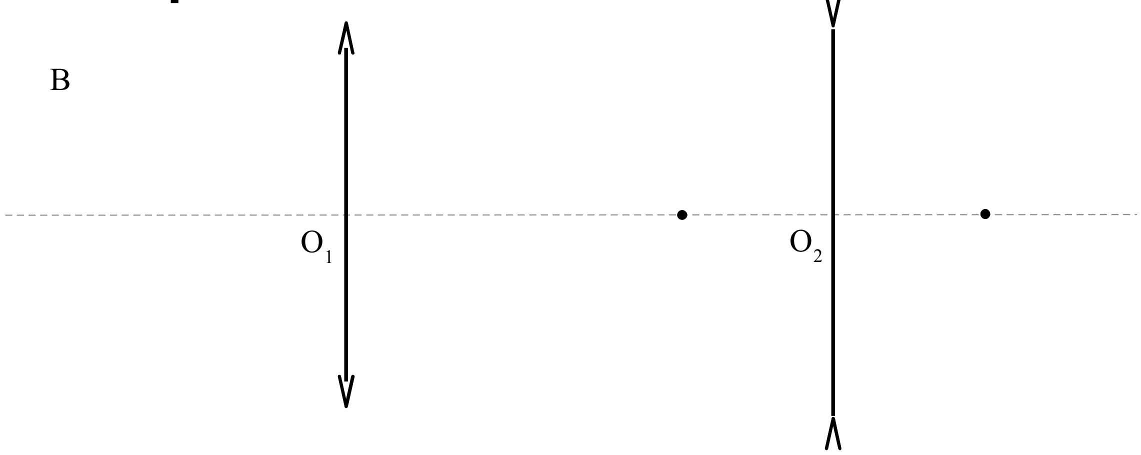


Figure 7 : on a indiqué par des points la position des foyers de l'oculaire

Réponses

Satellites artificiels

1)

$$\vec{F} = -\frac{G\,m\,M_T}{r^2}\,\vec{u}_r$$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{G\,m\,M_T\,\vec{r}}{r^3}}$$

---

2)

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\,\vec{u}_r$$

avec $\boxed{K = G\,m\,M_T}$

---

3) $\longrightarrow$ Une définition possible de conservative :

Cette force ne fournit aucun travail sur un cycle et donc ne modifie pas l'énergie sur un cycle

$$\boxed{\oint \vec{F}\,\vec{dl} = 0}$$

remarques : autres possibilités éventuellement :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_P$$

$$\delta W = \vec{F}\,\vec{dl} = -dE_P$$

$$W_A^B = E_{P_B} - E_{P_A}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$$

$\longrightarrow$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_P(r,\theta,\varphi)$$

$$\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi \quad \left|\begin{array}{l} -\frac{K}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} -\frac{\partial E_P}{\partial r} \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial E_P}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_P}{\partial \varphi} \end{array}\right.$$

donc $\frac{\partial E_P}{\partial \theta} = 0$

$\frac{\partial E_P}{\partial \varphi} = 0$

Ep est indépendant de θ, de φ
et ne dépend finalement que de r

$$\frac{dEp(r)}{dr} = \frac{K}{r^2}$$

$$Ep = -\frac{K}{r} + \cancel{cste}$$
choisie nulle

on choisit donc Ep nul si $r \to \infty$

$$\boxed{Ep = -\frac{K}{r}}$$

---

4) $\rightarrow$ La force est centrale : dans le référentiel $\mathcal{R}_G$, la droite d'action de la force $\vec{F}$ passe par le point fixe O (centre de force)

$\rightarrow$ Théorème du moment cinétique :

Dans un référentiel galiléen, la dérivée du moment cinétique, en un point fixe, est égale au moment des forces en ce point.

---

5) $\rightarrow$ $$\boxed{\vec{\sigma}(A)_{/\mathcal{R}} = \vec{AP} \wedge m\vec{v}_{(P)}}$$

$\rightarrow$ $$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{d\vec{AP}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{AP} \wedge \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{F}}$$

$$= \frac{d}{dt}(\vec{OP} - \vec{OA}) \wedge m\vec{v} + \vec{\mathcal{M}}_{(A)}$$

$$= (\vec{v} - \vec{v}_{(A)}) \wedge m\vec{v} + \vec{\mathcal{M}}(A)$$

avec $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = -\vec{v}_{(A)} \wedge \vec{p} + \vec{\mathcal{M}}(A)}$$

$\rightarrow$ Si A est fixe, on obtient le théorème du moment cinétique

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(A\text{fixe}) = \vec{\mathcal{M}}(A)}$$

---

6) Le point O est fixe, on peut écrire le théorème :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(O) = \vec{\mathcal{M}}(O)$$
$$= \vec{OP} \wedge \vec{F}$$
$$= r\,\vec{u_r} \wedge -\frac{K}{r^2}\,\vec{u_r}$$
$$= \vec{0}$$

La force étant centrale, le moment $\vec{\mathcal{M}}(O)$ est nul.

D'où $\boxed{\vec{\sigma}(O) = \text{constante}}$

---

7) Le moment cinétique est constant.

$$\vec{\sigma}(O) = \underbrace{\vec{OP} \wedge m\vec{v}}_{\text{expression}} = \underbrace{\vec{r_o} \wedge m\vec{v_o}}_{\substack{\text{valeur} \\ \text{(cf. conditions initiales)}}}$$

donc $\vec{OP} \perp \vec{\sigma}$

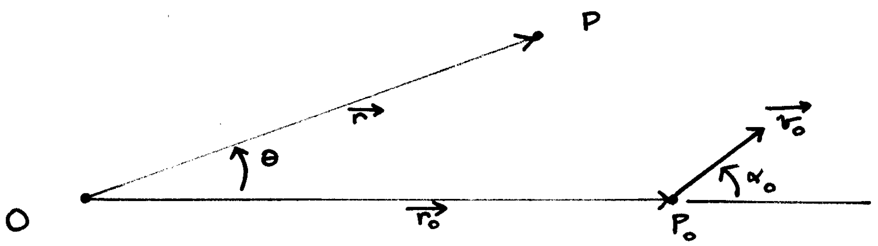
P appartient au plan perpendiculaire à $\vec{\sigma}$ et passant par O

soit :

$\boxed{\text{P appartient au plan perpendiculaire à } \vec{r_o} \wedge \vec{v_o} \text{ et passant par O.}}$

---

8)



---

9)
$$\vec{r} = r\,\vec{u_r}$$
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$= \dot{r}\,\vec{u_r} + r\,\frac{d\vec{u_r}}{dt}$$
$$\hookrightarrow \frac{d\vec{u_r}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}}$$

---

10) $$\boxed{\vec{\sigma} = \sigma\,\vec{u_z}}$$

puisque la trajectoire s'effectue dans le plan $z=0$, qui doit être perpendiculaire à $\vec{\sigma}$

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

$$\begin{array}{c|c|c} & r & & \dot{r} \\ & 0 & m & r\dot{\theta} \\ \vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z} & 0 & & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\vec{\sigma} = \underbrace{m r^2 \dot{\theta}}_{\sigma}\,\vec{u_z}}$$

En utilisant les conditions initiales

$$\vec{\sigma} = \vec{r_0} \wedge m\vec{v_0}$$

$$\begin{array}{c|c|c} & r_0 & & v_0 \cos\alpha_0 \\ & 0 & m & v_0 \sin\alpha_0 \\ \vec{u_{r_0}}, \vec{u_{\theta_0}}, \vec{u_z} & 0 & & 0 \end{array}$$

$$\boxed{\vec{\sigma} = m\, r_0 v_0 \sin\alpha_0\,\vec{u_z}}$$

D'où intégrale première du mouvement (de conservation du moment cinétique)

$$m r^2 \dot{\theta} = m r_0 v_0 \sin\alpha_0$$

$$\boxed{r^2 \dot{\theta} = r_0 v_0 \sin\alpha_0}$$

---

11) $$E = E_c + E_P$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{K}{r}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{K}{r}}$$

En utilisant les conditions initiales :

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{K}{r_0}}$$

D'où intégrale première du mouvement (de conservation de l'énergie)

$$\boxed{\frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right) - \frac{K}{r} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{K}{r_0}}$$

---

12)
$$\vec{H} = \vec{P} - m \frac{K}{\sigma^2} \left(\vec{\sigma} \wedge \vec{u_r}\right)$$

On dérive ($\vec{\sigma}$ est une constante puisque force centrale)

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{F}} - m \frac{K}{\sigma^2} \left(\underbrace{\vec{\sigma}}_{\sigma \vec{u_z}} \wedge \underbrace{\frac{d\vec{u_r}}{dt}}_{\vec{u_\theta}\,\dot{\theta}}\right)$$

$$= -\frac{K}{r^2} \vec{u_r} + m \frac{K}{\sigma} \dot{\theta}\, \vec{u_r}$$

En remplaçant σ par son expression $m r^2 \dot{\theta}$

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = -\frac{K}{r^2} \vec{u_r} + \frac{K}{r^2} \vec{u_r}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{0}}$$

$\vec{H}$ est une constante

---

13)
$\vec{P}$ $(= m\vec{v})$ est orthogonal à $\vec{\sigma}$

$\vec{\sigma} \wedge \vec{u_r}$ est lui aussi orthogonal à $\vec{\sigma}$

donc

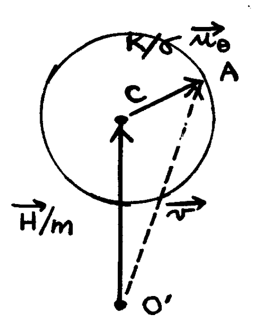
$\boxed{\vec{H} \text{ est orthogonal à } \vec{\sigma} = \sigma \vec{u_z}}$

---

14)
$$\vec{H} = m\vec{v} - m \frac{K}{\sigma^2} \underbrace{\left(\vec{\sigma} \wedge \vec{u_r}\right)}_{\sigma \vec{u_\theta}}$$

d'où

$$\boxed{\vec{v} = \underbrace{\frac{\vec{H}}{m}}_{\text{vecteur constant}} + \underbrace{\frac{K}{\sigma} \vec{u_\theta}}_{\text{vecteur de norme } \frac{K}{\sigma} \text{ constante et d'orientation variable selon } \vec{u_\theta}}}$$



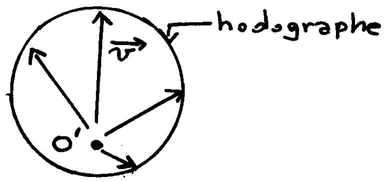
L' hodographe est donc un cercle :

— de centre C (avec $\overrightarrow{O'C} = \dfrac{\vec{H}}{m}$)

— de rayon $\dfrac{K}{\sigma}$

---

15) $\rightarrow$ O' à l' intérieur de l' hodographe :



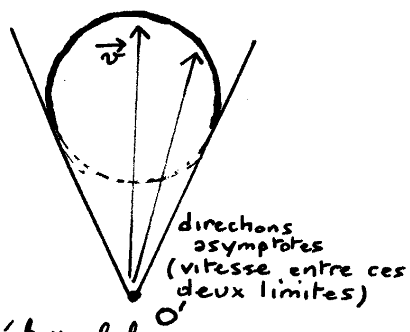
toutes les orientations de vitesse sont possibles.

La trajectoire est elliptique.

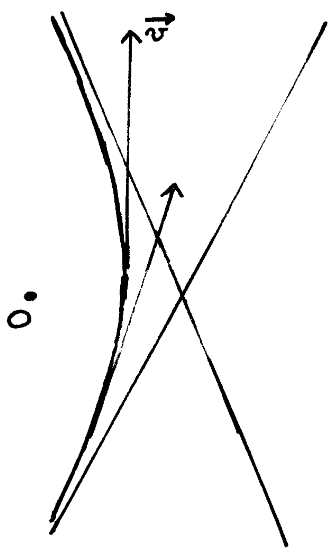
$\rightarrow$ O' à l' extérieur de l' hodographe :

2 possibilités :

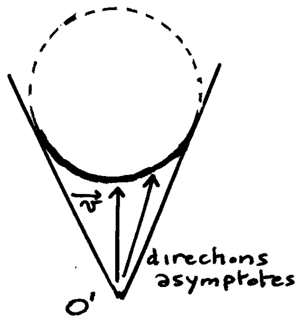
soit

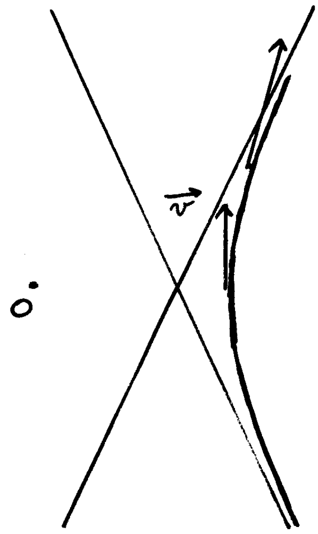


branche d' hyperbole
(correspond à $K > 0$
c'est à dire à l'attraction)



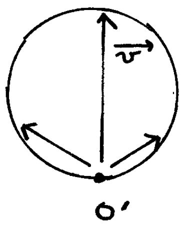
soit





<u>branche d'hyperbole</u>
(correspond à $K<0$
c'est à dire à la répulsion)

$\longrightarrow$ O' sur l'hodographe :



La moitié des orientations de vitesse est possible.
(aux limites, la vitesse s'annule)

La trajectoire est <u>parabolique</u>.

---

16) <u>Au sommet</u> de la trajectoire, $\vec v = v \, \vec u_{\theta \, sommet}$

donc $\dfrac{\vec H}{m} = v \, \vec u_{\theta \, sommet} + \dfrac{K}{\sigma} \, \vec u_{\theta \, sommet}$

$\vec H$ est selon $\vec u_{\theta \, sommet}$

$\vec H$ est perpendiculaire à $\vec u_{r \, sommet}$

$\boxed{\vec H \text{ est perpendiculaire à l'axe de la conique}}$

---

17) → Par exemple puisque $E = E_c + E_p = cste$, on peut dire que pour la trajectoire circulaire $E_p(r)$ est constante donc E_c est une constante et la vitesse est uniforme.

→ La trajectoire circulaire est un cas particulier de trajectoire elliptique ... mais puisque uniforme, $\|\vec{v}\|$ est une constante. En se reportant à 15) on voit que O' doit être en C, centre du cercle hodographe, donc :

$$\boxed{\vec{H}_{cercle} = \vec{0}}$$

---

18)

$$\vec{E} = \frac{1}{mK}\,\vec{H} \wedge \vec{\sigma}$$

$\vec{H}$: dans le plan de la trajectoire et perpendiculaire à l'axe de la conique

$\vec{\sigma}$: perpendiculaire au plan de la trajectoire

$\vec{E}$ appartient au plan de la trajectoire.
Sa direction est celle de l'axe de la conique

---

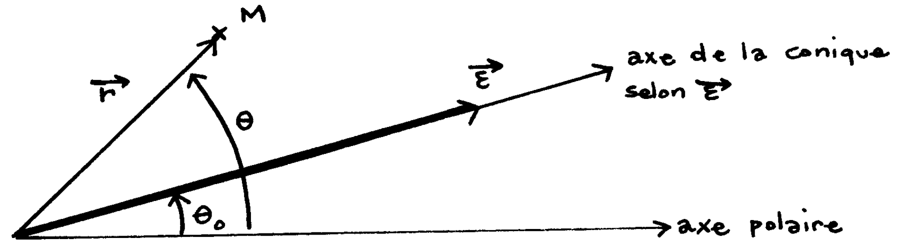
19)

$$\vec{E} = \underbrace{\frac{1}{mK}}_{cstes}\,\underbrace{\vec{H}}_{cste} \wedge \underbrace{\vec{\sigma}}_{cste}$$

$\vec{E}$ est une constante (évident)

---

20)



$\longrightarrow \qquad \vec{r}\,\vec{\varepsilon} = r\,\|\vec{\varepsilon}\|\cos(\theta-\theta_0)$

$\longrightarrow \qquad \vec{r}\,\vec{\varepsilon}$ calculé dans la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$

$$= \frac{1}{mK}\,\vec{r}\,(\vec{H}\wedge\vec{\sigma})$$

$$\vec{r}\begin{vmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{\sigma}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma \end{vmatrix}$$

$$\vec{H} = \vec{P} - m\frac{K}{\sigma^2}\left(\vec{\sigma}\wedge\frac{\vec{r}}{r}\right) \begin{vmatrix} m\dot{r} \\ mr\dot{\theta} - m\frac{K}{\sigma^2}\sigma \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{mK}\begin{vmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \sigma\left(mr\dot{\theta} - m\frac{K}{\sigma}\right) \\ -m\dot{r}\sigma \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{mK}\,r\sigma\left(mr\dot{\theta} - m\frac{K}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{\sigma\dot{\theta}r^2}{K} - r$$

avec $\dot{\theta} = \frac{\sigma}{mr^2}$

$$= \frac{\sigma^2}{mK} - r$$

ce qui donne finalement :

$$r\,\|\vec{\varepsilon}\|\cos(\theta-\theta_0) = \frac{\sigma^2}{mK} - r$$

on pose $\boxed{p = \frac{\sigma^2}{mK}}$

$$r\,(1 + \|\vec{\varepsilon}\|\cos(\theta-\theta_0)) = p$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta-\theta_0)}$$

$$\boxed{e = \|\vec{\varepsilon}\|}$$

($\vec{\varepsilon}$ est le vecteur excentricité, de norme e, porté par l'axe de la conique) remarque : calcul plus élégant, sans projeter sur une base :

$$\vec{r}\,\vec{\varepsilon} = \vec{r}\ \frac{1}{mK}(\vec{H}\wedge\vec{\sigma}) \qquad \text{- pdt mixte -}$$

$$= \frac{1}{mK}\ \vec{\sigma}\ (\vec{r}\wedge\vec{H})$$

$$= \frac{1}{mK}\ \vec{\sigma}\ \left(\vec{r}\wedge\left(\vec{p}-\frac{mK}{\sigma^2}\left(\vec{\sigma}\wedge\frac{\vec{r}}{r}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{mK}\ \vec{\sigma}\ \left(\vec{\sigma}-\frac{mK}{\sigma^2 r}\underbrace{\vec{r}\wedge(\vec{\sigma}\wedge\vec{r})}\right)$$

$\vec{r}\wedge(\vec{\sigma}\wedge\vec{r})$ - double pdt vectoriel -

$= \vec{\sigma}(\vec{r}.\vec{r}) - \vec{r}\ \underbrace{(\vec{\sigma}.\vec{r})}_{\text{nul}}$

$$= \frac{1}{mK}\ \vec{\sigma}\ \left(\vec{\sigma}-\frac{mK}{\sigma^2 r}\vec{\sigma}\,r^2\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{mK} - r$$

... etc

---

21)

$$r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$$

Si $\theta = \theta_0$, le cosinus est maximum, r est minimum

$$\boxed{r_{min} = \frac{p}{1+e}}$$

θ_0 est l'angle entre l'axe polaire et l'axe de la conique dirigé du foyer vers le sommet le plus proche (périgée)

---

22) $\longrightarrow$

$$p = \frac{\sigma^2}{mK}$$

$$= \frac{(m\,r_0\,v_0\sin\alpha_0)^2}{m\ (G\,m\,M_T)}$$

$$\boxed{p = \frac{r_0^2\,V_0^2\sin^2\alpha_0}{G\ M_T}}$$

finalement pour $\theta = 0$

$$u = \frac{1}{r_0} = \frac{1}{p}(1 + e\cos\theta_0) \qquad \text{d'où } \cos\theta_0$$

$$u' = -\frac{v_0\cos\alpha_0}{r_0 v_0 \sin\alpha_0} = -\frac{e}{p}\sin(-\theta_0) \qquad \text{d'où } \sin\theta_0$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\theta_0 &= \left(\frac{p}{r_0} - 1\right)\frac{1}{e}\\ \sin\theta_0 &= -\frac{p}{r_0}\,\frac{1}{e}\,\frac{1}{\tan\alpha_0}\end{aligned}} \qquad (e \neq 0,\ \alpha_0 \neq 0 \text{ ou } \pi)$$

---

23) remarque : on pose $\frac{r_0 v_0^2}{G M_T} = 1$ et $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$

Les résultats précédents s'écrivent alors :

$$\boxed{p = r_0 \sin^2\alpha_0}$$

$$e^2 = 1 - \sin^2\alpha_0$$

$$\boxed{e = \cos\alpha_0} \quad (>0)$$

$$\cos\theta_0 = -\cos\alpha_0$$

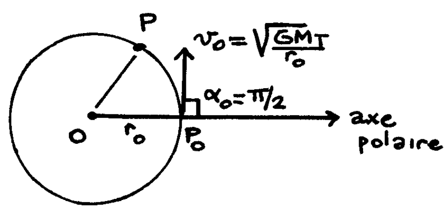
$$\sin\theta_0 = -\sin\alpha_0$$

$$\boxed{\theta_0 = \alpha_0 + \pi}$$

$\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ $\boxed{e = 0}$

La trajectoire est donc un cercle : $r = r_0$

$$\boxed{p = r_0}$$



$\longrightarrow$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{mK}\left(\vec{H}\wedge\vec{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{mK}\left[\left(\vec{P} - m\frac{K}{\sigma^2}\left(\vec{\sigma}\wedge\frac{\vec{r}}{r}\right)\right)\wedge\vec{\sigma}\right]$$

$$= \frac{1}{mK}\left(\vec{P}\wedge\vec{\sigma}\right) - \frac{1}{r\sigma^2}\underbrace{\left(\vec{\sigma}\wedge\vec{r}\right)\wedge\vec{\sigma}}_{\begin{array}{c}-\vec{\sigma}\wedge(\vec{\sigma}\wedge\vec{r})\\ -\left(\vec{\sigma}\underbrace{(\vec{r}.\vec{\sigma})}_{nul}-\vec{r}\sigma^2\right)\end{array}}$$

$$= \frac{1}{mK}\left(\vec{P}\wedge\vec{\sigma}\right) - \frac{\vec{r}}{r}$$

On écrit les coordonnées en $t=0$ dans la base $(\vec{u}_{r_0}, \vec{u}_{\theta_0}, \vec{u}_z)$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{mK}\begin{vmatrix} m v_0\cos\alpha_0 \\ m v_0 \sin\alpha_0 \\ 0\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ m r_0 v_0 \sin\alpha_0\end{vmatrix} - \frac{1}{r_0}\begin{vmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0\end{vmatrix}$$

$$\vec{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \dfrac{m r_0 v_0^2}{K}\sin^2\alpha_0 - 1 \\ -\dfrac{m r_0 v_0^2}{K}\sin\alpha_0\cos\alpha_0 \\ 0\end{vmatrix}$$

Donc :

$$e^2 = \vec{\varepsilon}^{\,2}$$

$$= \left[\left(\frac{m r_0 v_0^2}{K}\right)\sin^2\alpha_0 - 1\right]^2 + \left(\frac{m r_0 v_0^2}{K}\right)^2\sin^2\alpha_0\cos^2\alpha_0$$

$$e^2 = 1 + \left(\frac{m r_0 v_0^2}{K}\right)\left(\left(\frac{m r_0 v_0^2}{K}\right) - 2\right)\sin^2\alpha_0$$

$$\boxed{e^2 = 1 + \left(\frac{r_0 v_0^2}{G M_T}\right)\left(\left(\frac{r_0 v_0^2}{G M_T}\right) - 2\right)\sin^2\alpha_0}$$

$\longrightarrow$ Détermination de θ_0 à partir de deux lignes trigonométriques.
On écrit les conditions initiales ($t=0$ avec $\theta=0$)

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{P}\left(1 + e\cos(\theta-\theta_0)\right)$$

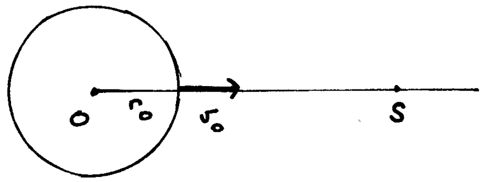
$$u' = \left(\frac{1}{r}\right)' = \frac{1}{P} \times -e\sin(\theta-\theta_0)$$

avec $u' = -\dfrac{r'}{r^2}$

$$= -\frac{(dr/dt)/(d\theta/dt)}{r^2}$$

$$= -\frac{v_r}{\sigma/m}$$

24) $\alpha_0 = 0$



La trajectoire est ici rectiligne (conique dégénérée)
L'altitude maximale atteinte correspond en S à $r = r_{max}$
on l'obtient facilement en écrivant la conservation de l'énergie

$$E_{départ} = E_{en\ S}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{G M_T m}{r_0} = 0 - \frac{G M_T m}{r_{max}}$$

d'où
$$r_{max} = \frac{1}{\frac{1}{r_0} - \frac{v_0^2}{2 G M_T}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2 r_0}}$$

$$\boxed{r_{max} = 2 r_0}$$

remarque

L'étude réalisée dans l'exercice suppose $\vec{\sigma} \neq \vec{0}$.
Ici $\vec{\sigma} = \vec{0}$.

---

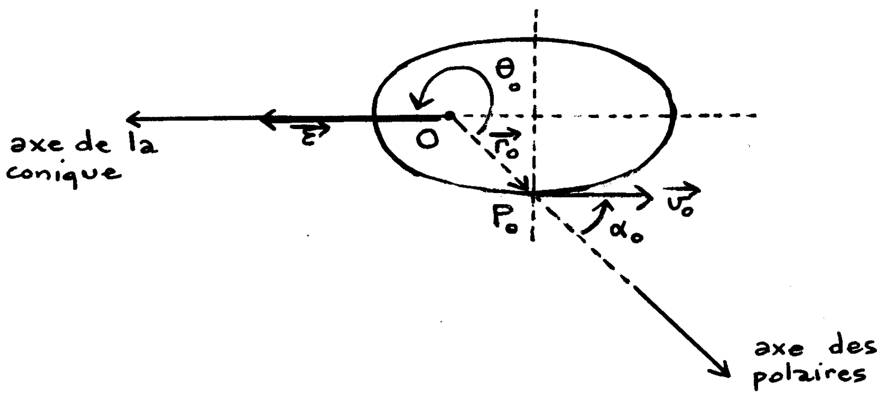
25) $\longrightarrow$ $\boxed{e = \cos \alpha_0 < 1}$

La conique est donc une ellipse

$\longrightarrow$ $\boxed{p = r_0 \sin^2 \alpha_0}$

(on rappelle que $r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} = p$ si $(\theta - \theta_0) = \pm \frac{\pi}{2}$)

$$\boxed{\theta_0 = \alpha_0 + \pi}$$



→ $\vec{v_0}$ et $\vec{\varepsilon}$ sont de même direction.
Il faut donc que P_0 appartienne au petit axe de l'ellipse.

Gaz parfait et travail

1)

$$\Delta U = W + Q$$

La transformation étant adiabatique, on a $Q=0$ d'où

$$\boxed{W = \Delta U}$$

Lors d'une transformation adiabatique, le travail est égal à la variation d'énergie interne

---

2)

$$Q = \Delta U - W$$

L'expression du travail est :

$$W = \int_{\text{transformation}} -P_{ext}\, dV$$

$$= -P_{ext}\,(V_{final} - V_{initial})$$

puisque la pression extérieure ne change pas lors d'une transformation monobare.

Finalement :

$$Q = (U_{final} - U_{initial}) + P_{ext}V_{final} - P_{ext}V_{initial}$$

L'état initial est un état d'équilibre

$$P_{initial} = P_{ext}$$

L'état final est un état d'équilibre

$$P_{final} = P_{ext}$$

$$Q = (U_{final} + P_{final}V_{final}) - (U_{initial} + P_{initial}V_{initial})$$

$$= H_{final} - H_{initial}$$

$$\boxed{Q = \Delta H}$$

Lors d'une transformation monobare, la chaleur est égale à la variation d'enthalpie

---

3) Si la transformation est isentropique, l'entropie est constante.

$$S = nR \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln(T) - nR \ln(P) + S_o = \text{Cste}$$

donc

$$\ln(T) - \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln(P) = \text{Cste}'$$

$$\ln \frac{T}{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \text{Cste}''$$

$$T\, P^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \text{Cste}'''$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} T\, P^{\alpha} = \text{Cste} \\ \text{avec } \alpha = -\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \end{array}}$$

---

4) $\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{La transformation est une compression} \\ P_2 > P_1 \quad \text{et} \quad T_2 = T_1 = T_o\end{array}}$

$\longrightarrow$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1)$$

$$\boxed{\Delta U = 0}$$

$$\Delta H = H_2 - H_1 = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_2 - T_1)$$

$$\boxed{\Delta H = 0}$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_1} - nR \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$\boxed{\Delta S = -nR \ln \frac{P_2}{P_1}}$$

---

5) $\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}\text{La transformation est un chauffage} \\ P_2 = P_1 = P_o \quad \text{et} \quad T_2 > T_1\end{array}}$

ΔU	$= \dfrac{nR}{\gamma-1}(T_2-T_1)$
ΔH	$= \dfrac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_2-T_1)$
ΔS	$= \dfrac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln\dfrac{T_2}{T_1}$

---

6) La transformation est une compression, monotherme réversible (= isotherme)

$S_{créé} = 0$ (réversible)
$S_{échangé} = \Delta S$ $= -nR\ln\dfrac{P_2}{P_1}$

---

7) → Cette entropie échangée par le système avec l'extérieur correspond à un transfert de chaleur avec une source à T_0

$$S_{échangé} = \int_{1\to2}\frac{\delta Q}{T_{frontière}}$$

$$= \int_{1\to2}\frac{\delta Q}{T_0}$$

$$= \frac{1}{T_0}\,Q$$

$$Q = T_0\,S_{échangé}$$

$$\boxed{Q = -nRT_0\ln\frac{P_2}{P_1}}$$

→ La transformation est réversible au niveau mécanique $P_{ext} = P$

$$W = -\int_{1\to2}P_{ext}\,dV$$

$$= -\int_{1\to2}P\,dV$$

avec $V = \dfrac{nRT_0}{P}$

$dV = -nRT_0\dfrac{dP}{P^2}$

$$= nRT_0\int_{1\to2}\frac{dP}{P}$$

$$\boxed{W = nRT_0 \ln \frac{P_2}{P_1}}$$

Pour une transformation monotherme

$$\underbrace{\Delta U}_{\text{nul}} = W + Q$$

on trouve bien

$$\Delta U = 0$$

de plus pour cette compression $\underline{W > 0}$
et donc le gaz exporte de l'entropie (de la "chaleur")
$\underline{Q < 0}$
pour que la température ne change pas.

---

8) La réversibilité thermique est plus difficile à approcher car les échanges de chaleur sont très lents.
Pour que les échanges permettent au système de rester à la même température, on tend vers une durée infinie

---

9) La première étape est une compression ($P_i > P_1$).

---

10) La transformation est brusque :
- les échanges de chaleur n'auront quasiment "pas le temps" de se produire cf durée ≪ temps de relaxation des échanges de chaleur. On la suppose adiabatique.
Pas d'irréversibilité thermique puisque pas d'échange de chaleur.
- par contre, si on suppose durée ≫ temps de relaxation pour l'uniformisation des pressions, on aura P uniforme dans le gaz et $P_{gaz} = P_{extérieure}$.
La transformation est mécaniquement réversible.

Finalement, la transformation est réversible.

---

11) Au cours de la première étape, la température augmente.
La deuxième étape est un refroidissement au contact de l'ambiant.

---

12) Pendant cette deuxième étape d'échange de chaleur

$$\boxed{T_{extérieure} \neq T \text{ du système.}}$$

La température du système n'est d'ailleurs pas homogène (donc pas définie en réalité).
Il y a un gradient de T dans le système avec création d'entropie.
La transformation est irréversible à cause des échanges thermiques.
(Au plan mécanique, on peut supposer $P_{gaz} = P_2$ et réversibilité mécanique)

---

13) Cette deuxième étape est :

– monobare ($P_{ext} = P_2$ constante
$P_{initiale} = P_2$
$P_{finale} = P_2$)

– mais n'est pas monotherme (au sens choisi dans l'énoncé)
($T_{ext} = T_0$ constante
$T_{finale} = T_0$
$\boxed{T_{initiale} \neq T_0}$)

---

14) Transformation $1 \to i$ adiabatique réversible donc isentropique

$$T_1 \, P_1^{\alpha} = T_i \, P_i^{\alpha} \qquad (\text{cf } 3))$$

$$T_i = T_1 \left(\frac{P_i}{P_1}\right)^{-\alpha}$$

$$\boxed{T_i = T_0 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(1-\frac{1}{\gamma})}}$$

---

15) Transformation $1 \to i$ adiabatique donc (cf 1))

$$\boxed{Q_{1\to i} = 0}$$

$$W_{1\to i} = \Delta U$$

$$= \frac{nR}{\gamma - 1}(T_i - T_1)$$

$$\boxed{W_{1\to i} = \frac{nRT_0}{\gamma-1}\left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(1-\frac{1}{\gamma})} - 1\right)}$$

---

16) La deuxième étape est monobare (cf 2), 5), 13))

$$Q_{i\to 2} = \Delta H_{i\to 2}$$
$$= \frac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_2 - T_i)$$
$$= -\frac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_i - T_0)$$

$$\boxed{Q_{i\to 2} = -nRT_0 \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(1-\frac{1}{\gamma})} - 1\right)}$$

Pour $W_{i\to 2}$, par exemple :

$$W_{i\to 2} = \Delta U_{i\to 2} - Q_{i\to 2}$$
$$= \Delta U_{i\to 2} - \Delta H_{i\to 2}$$
$$= \Delta H_{i\to 2}\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)$$
$$= -Q_{i\to 2}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)$$

$$\boxed{W_{i\to 2} = nRT_0\left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(1-\frac{1}{\gamma})} - 1\right)}$$

remarque : on a cherché ici à illustrer l'utilisation des fonctions d'état.

Le calcul classique aurait donné :

$$W_{i\to 2} = \int_{i\to 2} -P_{ext}\, dV$$
$$= -P_2 (V_2 - V_i)$$
$$= -P_2\left(\frac{nRT_0}{P_2} - \frac{nRT_i}{P_2}\right)$$
$$= -nR(T_0 - T_i)$$
$$= -nRT_0\left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(1-\frac{1}{\gamma})}\right)$$

17) finalement :

$$W_{AB} = W_{1\to i} + W_{i\to 2}$$
$$= \frac{nRT_0}{\gamma-1}\left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1\right)$$
$$+ nRT_0\left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1\right)$$

$$\boxed{W_{AB} = nRT_0 \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1\right)}$$

---

18) – Il n'y a pas d'entropie créée dans la première étape réversible (étape pourtant très rapide)

– Pour trouver l'entropie créée dans la seconde étape (étape pourtant très lente)

$$S_{\substack{créé \\ i\to 2}} = \Delta S_{i\to 2} - S_{\substack{échange \\ i\to 2}}.$$

avec

$$\Delta S_{i\to 2} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_i} \qquad (\text{cf } 5)$$

$$= \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T_0}{T_0\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(1-\frac{1}{\gamma})}}$$

$$= -nR \ln \frac{P_2}{P_1}$$

et

$$S_{\text{échange}} = \int_{i\to 2} \frac{\delta Q}{T_0}$$

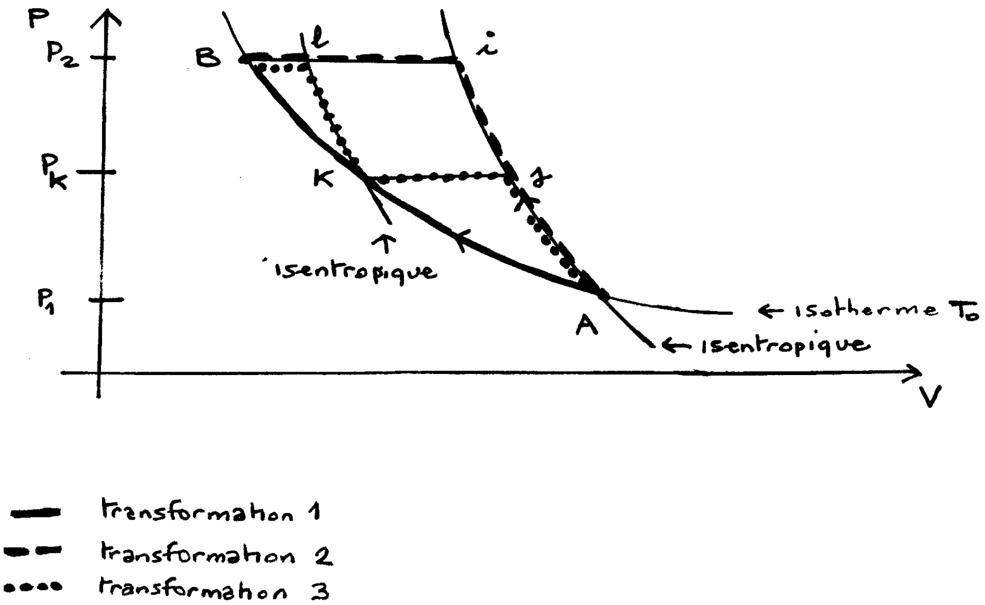
$$= \frac{Q_{i\to 2}}{T_0}$$

$$= -nR \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1\right)$$

$$\boxed{S_{\text{créé}} = nR\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1\right) - \ln\frac{P_2}{P_1}\right)}$$

---

19)



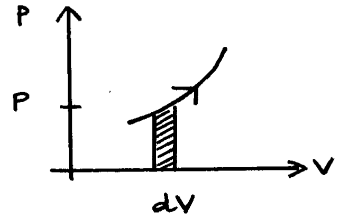
---

20) $$W = -\int P_{ext}\, dV$$

Ici les transformations étant mécaniquement réversibles :

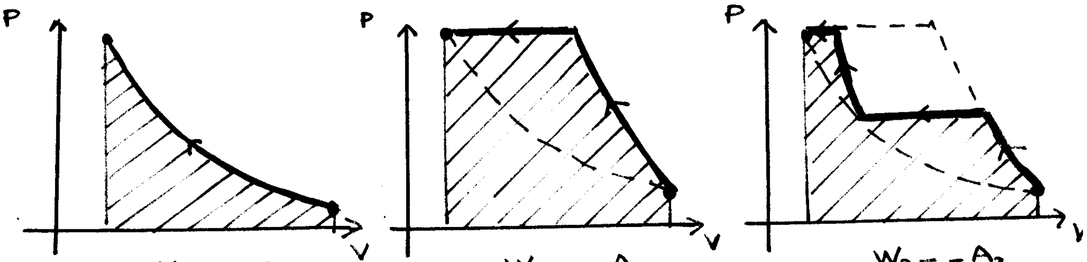
$$W = -\int P \, dV$$

$$\boxed{W = -\text{ Aire sous la courbe } (A)}$$



Pour les transformations envisagées, l'aire est négative (cf orientation de A à B en sens contraire de l'axe V)

donc $\boxed{W \text{ est positif}}$



$W_1 = -A_1$ $W_2 = -A_2$ $W_3 = -A_3$

On constate que :

$$\boxed{W_2 > W_3 > W_1}$$

---

21) On utilise la formule obtenue en 17)

$$\boxed{W_{A\to K} = nRT_0 \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\frac{P_K}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1\right)}$$

$$\boxed{W_{K\to B} = nRT_0 \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\frac{P_2}{P_K}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1\right)}$$

---

22) $$\underset{(P_K)}{W_{A\to B}} = nRT_0 \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\frac{P_K}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} + \left(\frac{P_2}{P_K}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 2\right)$$

L'extremum est, s'il existe, un minimum (cf on a vu qualitativement que $W_3 < W_2$)

On dérive

$$\frac{dW_{AB}}{dP_K} = nRT_0\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{(1-\frac{1}{\gamma})\,P_K^{(-\frac{1}{\gamma})}}{P_1^{(1-\frac{1}{\gamma})}} + P_2^{(1-\frac{1}{\gamma})}\,(-1+\frac{1}{\gamma})\,P_K^{(-2+\frac{1}{\gamma})}\right)$$

nul pour :

$$\frac{P_K^{(-\frac{1}{\gamma})}}{P_1^{(1-\frac{1}{\gamma})}} = \frac{P_2^{(1-\frac{1}{\gamma})}}{P_K\,P_K^{(1-\frac{1}{\gamma})}}$$

$$\frac{P_K}{P_1} = \frac{P_2}{P_K}$$

$$\boxed{P_K = \sqrt{P_1 P_2}}$$

W est minimal si P_K est la moyenne (géométrique) de P_1 et P_2.

---

23) $\longrightarrow$

$$W_{AB} = nRT_0\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\sqrt{\frac{P_2}{P_1}}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} + \left(\sqrt{\frac{P_2}{P_1}}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 2\right)$$

$$\boxed{W_{AB} = 2nRT_0\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(1-\frac{1}{\gamma})/2} - 1\right)}$$

$\longrightarrow$

$$S_{créé} = S_{créé\,AK} + S_{créé\,KB}$$

$$= nR\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\frac{P_K}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1\right) - \ln\frac{P_K}{P_1}\right)$$

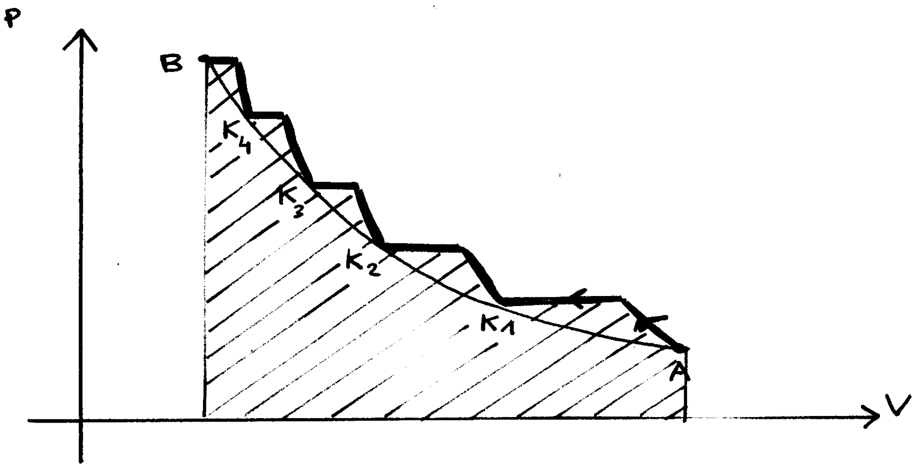
$$+ nR\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\frac{P_2}{P_K}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1\right) - \ln\frac{P_2}{P_K}\right)$$

(cf 18))

$$\boxed{S_{créé} = 2nR\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(1-\frac{1}{\gamma})/2} - 1\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{P_2}{P_1}\right)}$$

---

24) Si on augmente le nombre d'étapes intermédiaires, on se rapproche de l'isotherme AB.



Le travail tend vers le travail W_{AB}^{lim} obtenu pour une transformation <u>isotherme</u> (réversible)

---

25)

$$\boxed{W_{AB}^{lim} = nRT_o \ln \frac{P_2}{P_1}}$$

cf 7)

---

26)

transformation 1	W_{AB}	$=$	$nRT_o \ln \frac{P_2}{P_1}$
	$W_{AB} - W_{AB}^{lim}$	$=$	0
	$S_{créé}$	$=$	0
transformation 2	W_{AB}	$=$	$nRT_o \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right)$
	$W_{AB} - W_{AB}^{lim}$	$=$	$nRT_o \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right) - \ln \frac{P_2}{P_1} \right]$
	$S_{créé}$	$=$	$nR \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right) - \ln \frac{P_2}{P_1} \right]$
transformation 3	W_{AB}	$=$	$nRT_o \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}/2} - 1 \right)$
	$W_{AB} - W_{AB}^{lim}$	$=$	$nRT_o \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}/2} - 1 \right) - \ln \frac{P_2}{P_1} \right]$
	$S_{créé}$	$=$	$nR \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}/2} - 1 \right) - \ln \frac{P_2}{P_1} \right]$

on a $W_{irréversible} > W_{réversible}$

$$\boxed{W_{irréversible} - W_{réversible} = T_o \, S_{créé}}$$

Plus on crée d'entropie, plus le travail à fournir pour comprimer le gaz est important.

---

27) Pour la transformation isotherme (donc réversible)

$$\Delta U = W_{rev} + Q_{rev}$$

$$\Delta S = \frac{Q_{rev}}{T_o} + \cancel{S_{créé}}$$

Pour la transformation monotherme irréversible

$$\Delta U = W_{irrev} + Q_{irrev}$$

$$\Delta S = \frac{Q_{irrev}}{T_o} + S_{créé}$$

donc :

$$W_{rev} = \Delta U - T_o \Delta S$$

$$W_{irrev} = \Delta U - (T_o \Delta S - T_o S_{créé})$$

$$\boxed{W_{irrev} = W_{rev} + T_o S_{créé}}$$

Lentilles et lunettes

1) approximation de gauss :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les rayons sont } \underline{\text{paraxiaux}} \text{ (= proches de l'axe optique)}\\ \text{- ils sont peu inclinés par rapport à l'axe optique}\\ \text{- ils passent près du centre optique (la lentille sera diaphragmée)}\end{array}}$$

alors :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{- à un point objet correspond (quasiment) un point image. Il y a } \underline{\text{stigmatisme}} \text{ (approché)}\\ \text{- à un objet étendu appartenant à un plan perpendiculaire à l'axe optique correspond (quasiment) une image dans}\\ \text{un plan perpendiculaire à l'axe optique. Il y a } \underline{\text{aplanétisme}} \text{ (approché)}\end{array}}$$

---

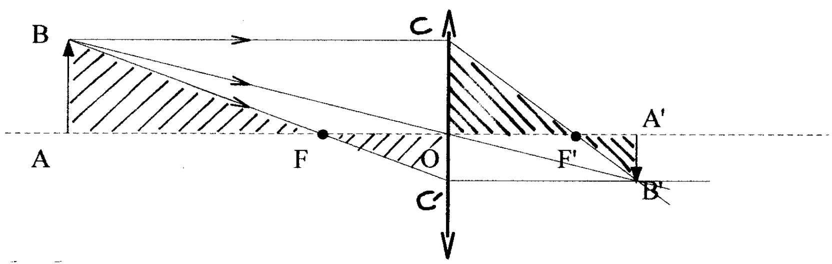
2)

$$\gamma = \frac{\text{taille image}}{\text{taille objet}}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}}$$

---

3)



Les triangles FAB et FOC' sont homothétiques

$$\frac{C'O}{AB} = \frac{FO}{AF}$$

$$\frac{-\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{-\overline{OF}}{-\overline{FA}}$$

$$-\gamma = \frac{-f}{-\sigma}$$

$$\boxed{\gamma = -\frac{f}{\sigma}}$$

Ici $\gamma < 0$
$f < 0$
$\sigma < 0$

Les triangles $F'A'B'$ et $F'OC$ sont homothétiques

$$\frac{B'A'}{OC} = \frac{F'A'}{OF'}$$

$$-\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}}$$

$$-\gamma = \frac{\sigma'}{f'}$$

$$\boxed{\gamma = -\frac{\sigma'}{f'}}$$

Ici $\gamma<0$
$f'>0$
$\sigma'>0$

---

4) D'où la relation de conjugaison :

$$\gamma = -\frac{f}{\sigma} = -\frac{\sigma'}{f'}$$

$$\sigma\sigma' = ff' \qquad \text{or } f' = -f$$

$$\boxed{\sigma\sigma' = -f'^2}$$

---

5) Les formules de Descartes :

conjugaison :

$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'}$$

$$\boxed{-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'}}$$

grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{p'}{p}}$$

---

6)

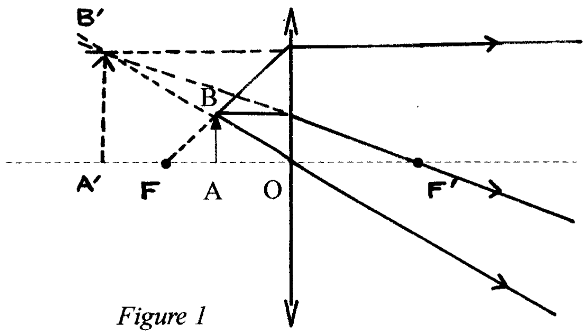


Figure 1

7)

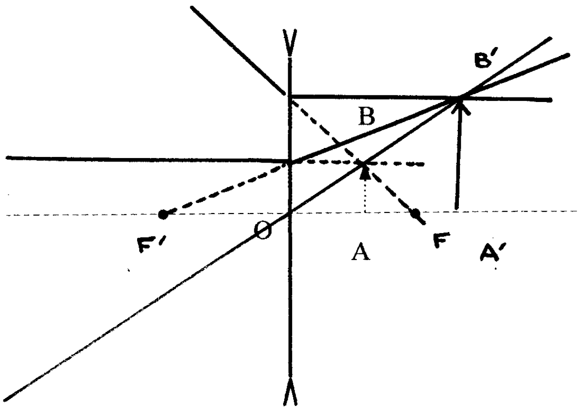


Figure 2

8)

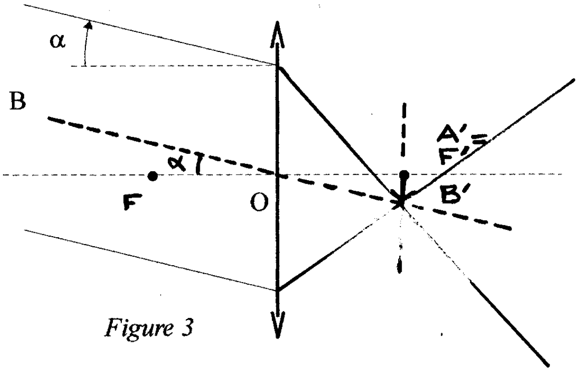


Figure 3

$(\alpha < 0)$

$$\boxed{\overline{A'B'} = f'\,\alpha}$$

9) L'image donnée par une lentille convergente est virtuelle si l'objet est placé <u>entre le foyer objet et le centre optique</u>

---

10) L'image donnée par une lentille divergente est réelle si l'objet est placé <u>entre le centre optique et le foyer objet</u>.

---

11) A.N. $f' = -25\text{ cm}$ (cf lentille divergente)

$\gamma = +2$

En utilisant les relations de Descartes :

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'}$$

$$\gamma = \frac{p'}{p}$$

on obtient :

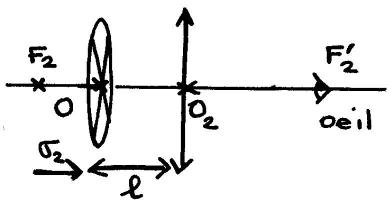
$$\boxed{\begin{aligned} p &= -f'\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \\ p' &= -f'(\gamma-1) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} p &= 12{,}5\text{ cm} \\ p' &= 25\text{ cm} \end{aligned}}$$

L'image est <u>réelle</u>, <u>dans le plan focal objet</u>.

---

12)



→ <u>L'oeil est au repos</u> si l'image du réticule est à l'infini. Le réticule se trouve donc dans le plan focal objet de l'oculaire. Le point <u>O est en F_2</u>.

On a donc :

$$\boxed{\sigma_2 = 0} \quad (\ell = f'_2)$$

→ <u>L'oeil accommode au maximum</u>. L'image du réticule est à la distance d_m de l'oeil.

En appliquant, par exemple, la formule de Newton

$$\sigma\sigma' = -f'^2$$

$$\sigma_2 \times (-d_m) = -f_2'^2$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{f_2'^2}{d_m}} \qquad \left(\ell = f_2' - \frac{f_2'^2}{d_m}\right)$$

Le tirage de l'oculaire entre les deux positions varie de

$$\boxed{|\Delta\ell| = |\Delta\sigma_2| = \frac{f_2'^2}{d_m}}$$

A.N.

$$= \frac{(10^{-2})^2}{0,25}$$

$$= 0,4\ 10^{-3}\ m$$

$$\boxed{|\Delta\ell| = 0,4\ mm}$$

---

13)

$$AB \xrightarrow[\text{objectif}]{} A_1B_1 \xrightarrow[\text{oculaire}]{} A'B'$$

A_1B_1 (dans le plan du réticule) en O ; $A'B'$ (à l'infini)

On applique la relation de Descartes au niveau de l'objectif

$$-\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{f_1'}$$

$$-\frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f_1'}$$

ici

$$\overline{O_1A_1} = \overline{O_1F_2}$$

$$= \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2}$$

$$= L - f_2'$$

finalement

$$-\frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'} - \frac{1}{L-f_2'}$$

$$\boxed{\overline{O_1A} = -\frac{f_1'(L-f_2')}{L-f_1'-f_2'}}$$

A.N.

$$\overline{O_1A}/_{cm} = -\frac{5\ (11-1)}{11-5-1}$$

$$\boxed{\overline{O_1A} = -10\ cm}$$

---

14)

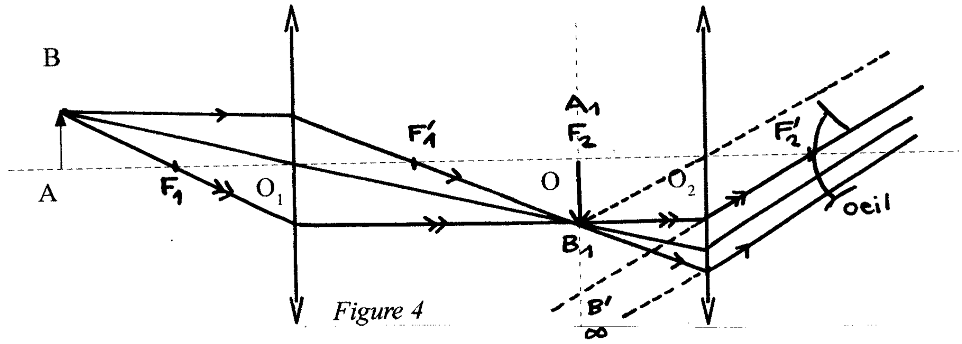


Figure 4

---

15) On a vu que $p_1 = \overline{O_1A}$ est donné par

$$-\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{f'_1}$$

→ si A'B' est à l'infini (réglage correct), $p'_1 = L - f'_2$ et

$$\overline{O_1A} = \frac{-f'_1(L-f'_2)}{L-f'_1-f'_2} = -10\text{ cm}$$

→ si A' B' est à la distance minimale, $p'_1 = L - f'_2 + \frac{f'^2_2}{d_m}$ (cf 12)

alors
$$\overline{O_1A} = -\frac{f'_1\left(L-f'_2+\frac{f'^2_2}{d_m}\right)}{L-f'_1-f'_2+\frac{f'^2_2}{d_m}} = -9{,}96\text{ cm.}$$

On se trompe de <u>0,4 mm</u> sur l'évaluation de la position de l'objet.

<u>remarque</u>

En fait puisque p'_1 (et p_1) varient peu... on peut approximer le calcul de ces variations $\Delta p'_1$ et Δp_1 à des calculs différentiels.

$$-\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{f'_1}$$

$$\frac{dp_1}{p_1^2} - \frac{dp'_1}{p'^2_1} = 0$$

on fait donc

$$\Delta p_1 \simeq \Delta p'_1 \frac{p_1^2}{p'^2_1}$$

$$\boxed{\Delta p_1 \simeq \frac{f'^2_2}{d_m} \frac{f'^2_1}{(L-f'_1-f'_2)^2}}$$

A.N. $$\Delta p_1/\text{cm} = \frac{1^2}{25} \frac{5^2}{(11-5-1)^2}$$

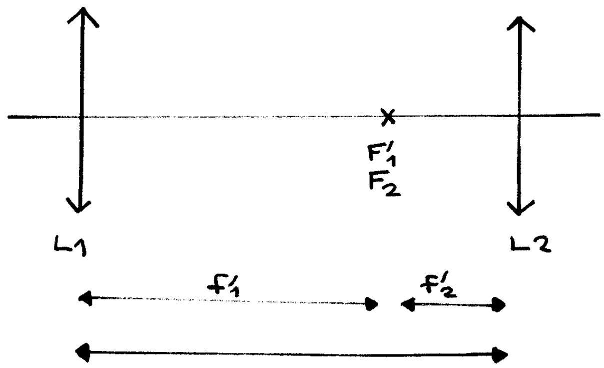
$$\boxed{\Delta p_1 = 0{,}04\text{ cm}}$$

16) lunette astronomique

$AB_{\infty} \xrightarrow[\text{objectif}]{} A_1B_1$ dans le plan focal image de L1

$A_1B_1 \xrightarrow[\text{oculaire}]{} A'B'_{\infty}$

donc A_1B_1 se trouve dans le plan focal objet de L2



$$\boxed{d = f'_1 + f'_2}$$

Le réticule est dans le plan de A_1B_1

(plan focal image de L1 et plan focal objet de L2)

17)

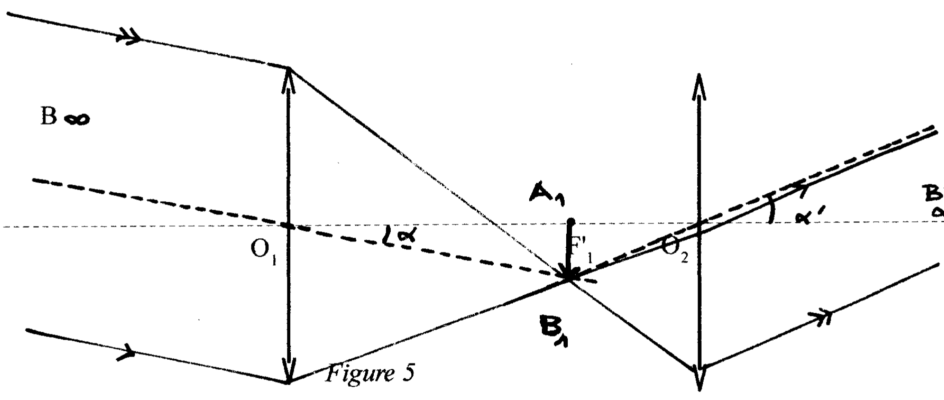


Figure 5

18)

$$\alpha = \frac{\overline{A_1B_1}}{f'_1}$$

(sur la figure
$\alpha < 0$
$\overline{A_1B_1} < 0$
$\alpha' > 0$)

$$\alpha' = -\frac{\overline{A_1B_1}}{f'_2}$$

$$\boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2}}$$

G est négatif car l'image est inversée

---

19)

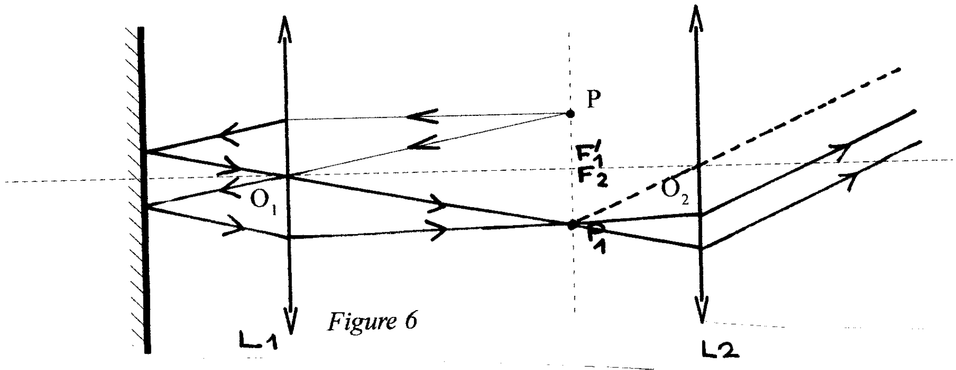


Figure 6

→ P dans le plan focal de L_1
En sortie de L1, on a un faisceau parallèle
→ qui se réfléchit (en faisceau parallèle) sur le miroir.
→ Image en P_1 symétrique de P / axe
→ P_1 se trouve dans le plan focal de L_2
Donc faisceau parallèle en sortie

---

20) - L'oeil voit (sans accommoder) l'image directe du réticule
- De plus, la réflexion sur le miroir donne P_1 (pas symétrique de P si le miroir est incliné mais toujours dans le plan focal contenant F'_1 et F_2)
La lumière reçue par l'oeil provient donc d'une image 1 du réticule dans le plan du réticule.
- On voit donc nettement deux réticules (et non un seul)

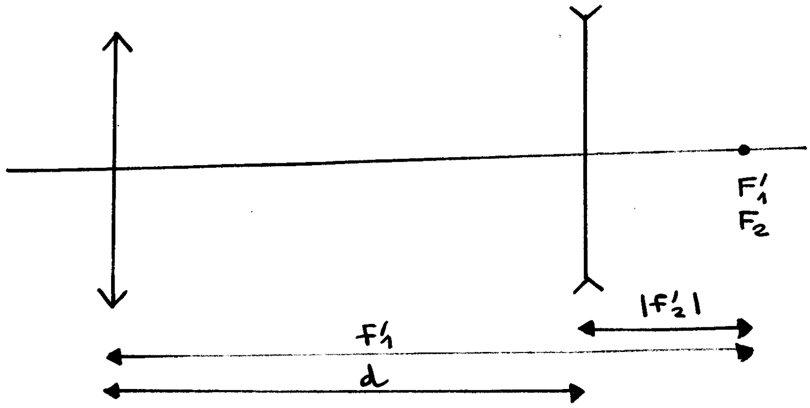
On règle le tirage oculaire - réticule pour voir deux réticules nets.

---

21) lunette de galileé.

le raisonnement est pareil qu'en 16).

Mais pour la lentille divergente, l'ordre des foyers est inverse.



$$d = f'_1 - |f'_2|$$

(ici f'_2 est négatif $|f'_2| = -f'_2$)

$$\boxed{d = f'_1 + f'_2}$$

Pas de réticule possible en F'_1 (... placé derrière la lentille L_2)

---

22)

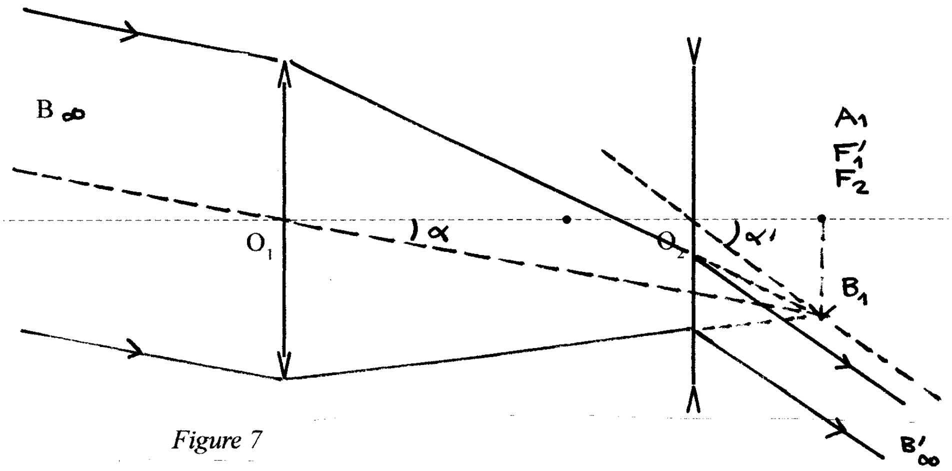


Figure 7

---

23)

$$\alpha = \frac{\overline{A_1B_1}}{f'_1}$$ (sur la figure $\alpha<0$, $\overline{A_1B_1}<0$, $\alpha'<0$)

$$\alpha' = \frac{\overline{A_1B_1}}{|f'_2|}$$

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f'_1}{|f'_2|}$$

$$\boxed{G = -\frac{f'_1}{f'_2}}$$

G est positif. L'image est droite,
(montage utilisé dans des lunettes terrestres "bon marché")
contrairement au montage type lunette astronomique ou
viseur basé sur deux lentilles convergentes.